

无限长板带对位荷载下的有效分布宽度计算 和应力分析方法

施江涛

[上海市政工程设计研究总院(集团)有限公司, 上海市 200092]

摘 要: 无限长板带对位荷载下的应力分布的研究有助于进一步理解和解决长条形板式结构(如带外伸横梁的桥梁结构等)的横向计算简化问题。其等效加载模式(平面应力问题)也对应于条形基础下的下卧刚性层的软土地基受力问题(平面应变问题)。通过理论分析采用复变函数法得到无限长板带对位荷载下的应力计算公式,然后导出该理论解的有效宽度简化计算方法,与理论解的误差控制在 5% 以内,为进一步工程应用做理论准备。

关键词: 复变函数法;应力扩散角法;有效分布宽度

中图分类号: U441

文献标志码: A

文章编号: 1009-7716(2021)12-0150-03

0 引言

本文首先用复变函数法得到无限长板带对位荷载下的应力计算公式,然后通过应力有效分布宽度的概念,通过归纳总结和函数拟合的方法导出无限长板带对位荷载下的不同位置的荷载有效宽度计算公式,并与各种不同参数条件下的有限元计算结果进行对比,结果显示其最大误差在 5% 以内。该结论和方法可为进一步的工程应用做理论准备。

1 概述

对无限长板带对位荷载下的应力分布的研究有助于进一步理解和解决长条形板式结构(如桥梁结构)等的横向计算问题。其等效加载模式(平面应力问题)(见图 1)也类似条形基础下的下卧刚性层的软土地基受力问题(平面应变问题)^[1],只需将弹性模量和泊松系数进行代换,即可将平面应力问题的解转化为平面应变问题的解。

该问题在工程上通常用应力扩散角法进行近似计算。但应力扩散角(通常取值 22°、30°、45°等)的取值没有统一的标准。单一的应力扩散角取值会引起较大的应力计算误差,导致计算出来的应力过大或过小,从而引起材料浪费或者使工程处于严重不安全状态。

本文首先用复变函数法导出无限长板带对位荷

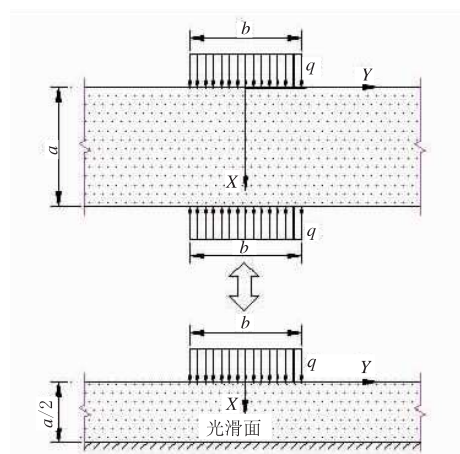


图 1 对位荷载下的无限长板带及其等效形式

载下的应力理论解,通过应力有效分布宽度的概念导出无限长板带对位荷载下的简化应力计算公式。

2 理论解的导出

对于图 1 的平面应力问题,根据弹性力学的复变函数理论,应力可由两个复变函数的解析式导出^[2]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \varphi_1'(z)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)]$$

其中边界条件为:

$$[\varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_1'(z) + \psi_1(z)]_s = \int_s (F_x + iF_y) ds$$

取应力函数形式如下:

$$\varphi_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} A(t) dt$$

$$\psi_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} -te^{-zt} B(t) dt$$

代入边界条件后得到应力函数:

收稿日期: 2021-03-05

作者简介: 施江涛(1987—),男,硕士,工程师,从事桥梁设计工作。

$$\varphi_1(z) = \int_0^\infty -\frac{2q}{\pi} \frac{sh \frac{at}{2} sh[(z-\frac{a}{2})t] \sin(\frac{bt}{2})}{t^2[sh(at)+at]} dt$$

$$\psi_1(z) = z\varphi_1'(z) + \int_0^\infty \frac{sh \frac{at}{2} sh[(z-\frac{a}{2})t] + atsh(zt)}{t^2[sh(at)+at]} dt$$

最终解得:

$$\sigma_x = \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{sh \frac{at}{2} \sin(\frac{bt}{2})}{t[sh(at)+at]} [2xtsh[(x-\frac{a}{2})t] - 2ch(x-\frac{a}{2})t] \cos ytdt - \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{a \sin(\frac{bt}{2})}{[sh(at)+at]} ch(xt) \cos(yt) dt$$

$$\sigma_y = -\frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{sh \frac{at}{2} \sin(\frac{bt}{2})}{t[sh(at)+at]} [2xtsh[(x-\frac{a}{2})t] + 4ch(x-\frac{a}{2})t] \cos ytdt + \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{a \sin(\frac{bt}{2})}{[sh(at)+at]} ch(xt) \cos(yt) dt$$

$$\tau_{xy} = \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{sh \frac{at}{2} \sin(\frac{bt}{2})}{t[sh(at)+at]} [sh[(x-\frac{a}{2})t] - 2xtch(x-\frac{a}{2})t] \sin ytdt + \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{a \sin(\frac{bt}{2})}{[sh(at)+at]} sh(xt) \sin(yt) dt$$

3 理论解的验证

在图1的模型中,取 $a=39.5\text{ m}$, $b=6\text{ m}$, $q=(300/b)\text{ MPa}$ 。 Y 向长度取 450 m ,建立ANSYS计算模型,计算得到 X 向正应力见图2、图3。

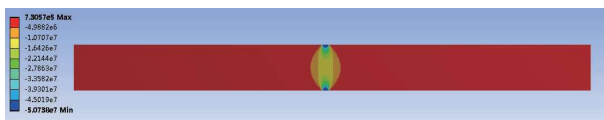


图2 有限元模型计算结果(单位:Pa)

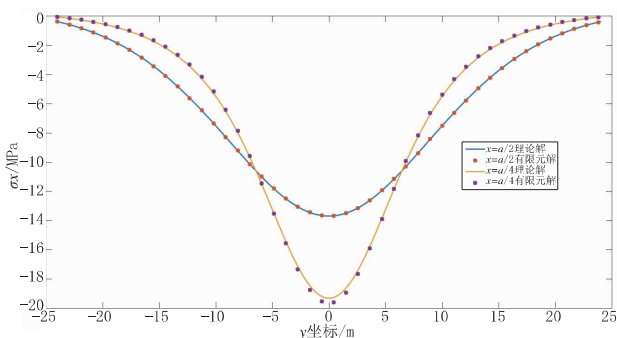


图3 理论解和有限元解

有限元结果选取了 $x=a/2$ 和 $x=a/4$, $y \in [-24, 24]$ 范围内的计算结果,并与理论计算结果对比,两者基本上重合。理论公式得到验证。

4 简化计算方法的得出

工程应用上对荷载方向的最大正应力 σ_x 较为关心(也用来作为关键位置的变形计算),故以下对 $y=0$ 处板带范围内的正应力 σ_x 提出简化计算方法。

简化计算方法以有效分布宽度的概念为基础,若 $x=x_0$ 处的有效计算宽度为 B_{eff} ,则 $x=x_0, y=0$ 处的应力为:

$$\sigma_x = \frac{q}{B_{\text{eff}}}$$

对 $x=x_0$ 处的有效计算宽度根据下式得出:

$$B_{\text{eff}}(x_0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x|_{x=x_0} dy}{\max(\sigma_x|_{x=x_0})}$$

4.1 关键点的有效分布宽度

首先寻求对 $x=a/2$ 、 $x=a/4$ 和 $x=0$ 处的有效分布宽度通用计算公式。显然, $x=0$ 处,

$$B_{\text{eff}}(0) = b$$

当 $x=a/2$ 时,分别取 $x=5$ 、 $x=10$ 、 $x=30$ 、 $x=50$ 、 $x=70$ 、 $x=100$, b 取 $a/100 \sim a$,按第2节得出的理论公式代入第4节 B_{eff} 的定义式中,并用二次函数对 B_{eff} 进行函数拟合得出 $B_{\text{eff}}(b)$ 。

从表1中,容易得出 $x=a/2$ 时的拟合式。同理,可得出当 $x=a/4$ 时的拟合式。

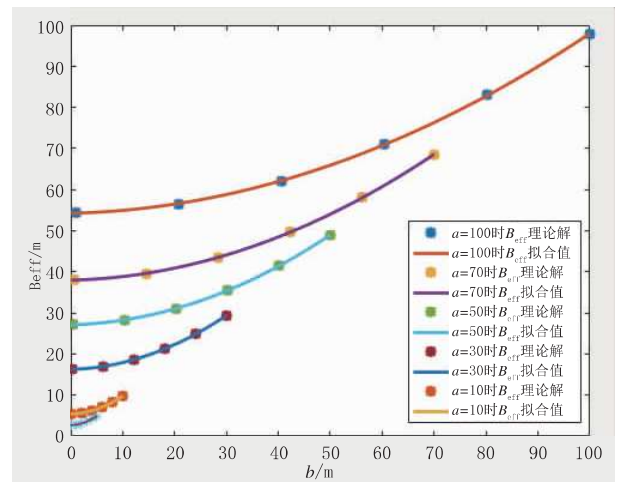


图4 $x=a/2$ 时 B_{eff} 理论解和拟合式的对比图

表1 $x=a/2$ 时 $B_{\text{eff}}(b)$ 拟合表

a/m	B_{eff}/m
100	$0.004\ 08\ b^2 + 0.029\ 5b + 54.25$
70	$0.005\ 83\ b^2 + 0.029\ 5b + 37.98$
50	$0.008\ 16\ b^2 + 0.029\ 5b + 27.13$
30	$0.013\ 6\ b^2 + 0.029\ 5b + 16.28$
10	$0.040\ 8\ b^2 + 0.029\ 5b + 5.426$
5	$0.081\ 6\ b^2 + 0.029\ 5b + 2.713$

经误差分析,上述 B_{eff} 的拟合式对理论解的误差在2%以内。

$$B_{\text{eff}}(a, b) = |_{x=a/4} \approx \frac{0.42}{a} b^2 + 0.2b + 0.36a$$

$$B_{\text{eff}}(a, b) = |_{x=a/2} \approx \frac{0.4}{a} b^2 + 0.29b + 0.54a$$

4.2 通用有效分布宽度

有了关键点的有效分布宽度后,对 $x=0\sim a/2$ 范围内有效分布宽度简化式的分析。

由于对称性,有效分布宽度 $B_{\text{eff}}(x)$ 应当对于 $x=a/2$ 对称,故

$$\begin{aligned} B_{\text{eff}} \Big|_{x=a/2} &= B_{\text{eff},a/2} \\ B_{\text{eff}} \Big|_{x=a/4} &= B_{\text{eff},a/4} \\ B_{\text{eff}} \Big|_{x=0} &= b \end{aligned}$$

另外,由 $x=0$ 、 $a/4$ 和 $a/2$ 关键点的有效分布宽度计算式,根据有效宽度分布线型,选择 4 次多项式可对有效分布宽度进行很好的拟合。设

$$B_{\text{eff}}(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r \tag{1}$$

将以上 5 式代入,解得上式中各参数值。

上式对当 $b \geq a/10$ 时, $x \in [0, a/2]$ 范围内误差精度能在 5% 以内,依然采用第 3 节的模型进行验证,见图 5。

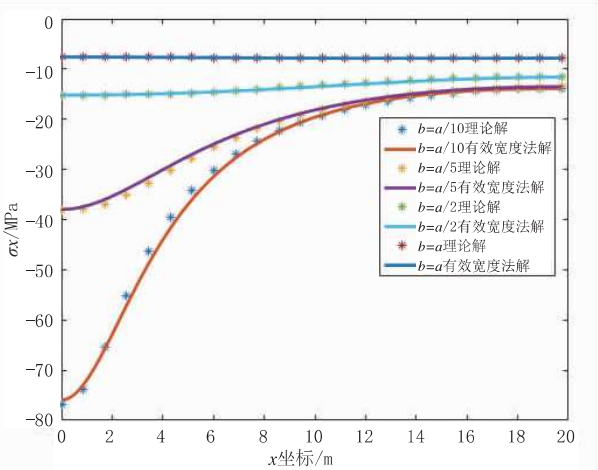


图 5 式(1)简化式与理论解的对比图

当 $b < a/10$ 时,在 $x \in [0, a/4]$ 范围内误差就会超过 5%,且 b 值越小,误差越大。在 $x \in (a/4, a/2]$ 范围内精度依然很好,可控制在 2% 范围内。故对 $b < a/10$ 时,在 $x \in [0, a/4]$ 范围内的某些固定点($x=a/40$ 、 $a/20$ 、 $a/10$ 、 $a/4$)采用 4.1 节同样的方法进行分析,结果如表 2 所示。对其之间的 x 值可进行分段线性插值。

$$\begin{aligned} m &= [128(b-2B_{\text{eff},a/4}+B_{\text{eff},a/2})]/a^4 \\ n &= [16(9b-16B_{\text{eff},a/4}+7B_{\text{eff},a/2})]/a^3 \\ p &= [4(11b-16B_{\text{eff},a/4}+5B_{\text{eff},a/2})]/a^2 \\ q &= 0 \\ r &= b \end{aligned} \tag{2}$$

依然采用第 3 节的模型对 $x \in [0, a/4]$ 范围内的应力进行验证,见图 6[对 $x \in [a/4, a/2]$ 范围内的计算结果采用的是式(1)]。计算结果显示,该分段计算方法计算精度较高,误差可控制在 5% 以内。

表 2 有效分布宽度分段插值表[式(2)]

x 值	B_{eff}
$a/4$	$0.42/ab^2+0.19b+0.36a$
$a/10$	$2.32/ab^2+0.011b+0.157a$
$a/20$	$3.71/ab^2+0.054b+0.080a$
$a/40$	$4.63/ab^2+0.159b+0.043a$
0	b

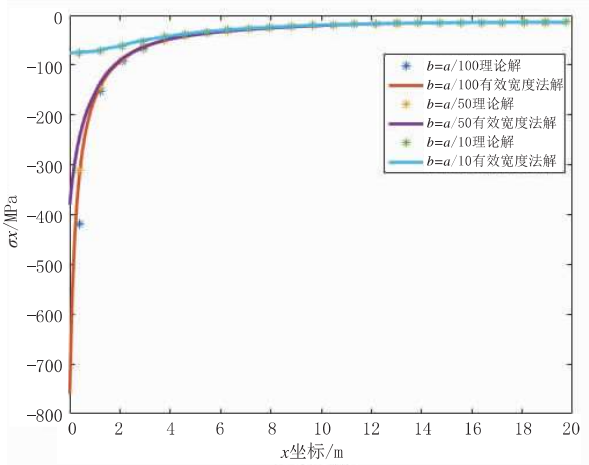


图 6 式(2)简化式与理论解的对比图

根据上述有效宽度计算式,得出不同板宽中心处的有效分布宽度和荷载扩散角,见表 3。

表 3 不同板宽中心处的有效宽度和荷载扩散角

荷载范围 b/m	板宽 a/m				
	5	10	20	30	40
板中心有效宽度 /m	3.1	5.6	10.9	16.3	21.7
扩散角 $\theta/(^\circ)$	12	20	24	25	26

从表 3 看出,当荷载范围一定、板宽变化时,其中心处的荷载扩散角是不一样的,且变化较大,不能用统一的荷载扩散角进行应力的简化计算。

5 结 论

用复变函数法得出无限长板带对位荷载下的应力计算公式,然后通过应力有效分布宽度的概念,导出无限长板带对位荷载下的简化应力计算公式,分为两种情况:

(1)当 $b \geq a/10$, $x \in [0, a/2]$ 时;当 $b < a/10$, $x \in [a/2, a/4]$ 时,采用式(1)。

(2)当 $b < a/10$, $x \in [0, a/2]$ 时,采用式(2)。

将以上公式与有限元和理论计算结果进行对比,显示其最大误差可控制在 5% 以内。从初步的应用结果可看到,不同板宽的应力扩散角是不一样的,不能用统一的荷载扩散角进行应力的简化计算。

参考文献:

[1] 席永慧,陈建峰.土力学与基础工程[M].上海:同济大学出版社,2006.
[2] 徐芝纶.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,2016.