

基于 EKF 和模态坐标转换的结构损伤识别方法

戴霖

(江西省水利科学院, 江西 南昌 330029)

摘要: 在扩展卡尔曼滤波算法的基础上, 结合模态坐标变换, 以模态坐标初始值和结构单元损伤参数构建状态向量, 提出一种改进的扩展卡尔曼滤波(EKF)算法。通过数值算例的识别结果, 证明这种算法能够对结构损伤参数进行有效识别。

关键词: EKF; 模态坐标转换; 参数识别

中图分类号:

文献标志码:

文章编号: 1009-7716(2022)09-0241-00

0 引言

扩展卡尔曼滤波(extended kalman filter, EKF)是在线性最小方差估计的基础上, 提出的一种实时递推型的最优估计滤波算法, 近年来被逐步应用于工程结构的参数识别研究^[1-5]当中。为解决传统 EKF 算法中其状态向量维度过大导致该算法运行效率变慢、识别精度下降等问题, 本文提出了一种改进的 EKF 算法, 引入模态坐标变换, 利用模态坐标转换对传统 EKF 的状态向量进行处理, 构建以模态坐标初始值和结构损伤参数的状态向量。由于结构振动响应通常由前几阶的低阶频率成分组成, 因此, 对复杂结构可以有效缩减状态向量的维数, 以保证算法的稳定性及准确性。

本文运用该算法对一多自由度系统的结构参数进行识别, 并采用 MATLAB 软件编制了程序。数值算例的结果表明, 该算法可以对结构的损伤参数进行识别, 且识别效果较好。

1 基本理论

多自由度系统自由振动运动方程:

$$M\ddot{p}(t) + C\dot{p}(t) + Kp(t) = 0 \quad (1)$$

式中: M, C, K 分别为结构质量、刚度矩阵; p 为各节点位移向量。

在上式中引入模态坐标变换 $p = \Phi q$ 。式中: q 为模态坐标, Φ 为正规化模态矩阵, 满足 $\Phi^T M \Phi = I$ 、 $\Phi^T K \Phi = \Lambda$ [$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2 \cdots \omega_n^2)$], ω_n 为结构第 n 阶无阻尼

固有频率]。可将上式模态坐标进行转化, 其运动方程为:

$$\ddot{p}(t) + \Gamma \dot{p}(t) + \Lambda p(t) = 0 \quad (2)$$

式中: $\Gamma = \Phi^T C \Phi$, 定义阻尼比 $\xi_n = C_n / (2\omega_n M_n)$, 则当 $0 < \xi_n < 1$, 即在小阻尼情况下, 该方程模态坐标可表示为:

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^N \{ \phi_n(x) \} q_n(t) \\ = \sum_{n=1}^N \{ \phi_n(x) \} \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} \left[q_{n0} \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{q}_{n0} + \xi_n \omega_n q_{n0}}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \right\} \quad (3)$$

式中: $\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$; q_{n0} 和 $\dot{q}_{n0}$ 分别为模态坐标及其速度的初始值。

定义第 i 个单元弹性模量的损伤参数为:

$$E_i^c = \alpha_i E_{i0}^c \quad (4)$$

则也可表示为第 i 个单元刚度的损伤参数为:

$$K_i^c = \alpha_i K_{i0}^c \quad (4a)$$

定义第 i 个单元模态阻尼比损伤参数为:

$$\xi_i = \beta_i \xi_{i0} \quad (5)$$

因此, 对于小阻尼情况下结构扩展的状态向量定义为:

$$\theta(t) = [q_{10} \cdots q_{N0} \dot{q}_{10} \cdots \dot{q}_{N0} \alpha_1 \cdots \alpha_M \beta_1 \cdots \beta_N]^T \quad (6)$$

式中: M 为单元个数; N 为模态阶数。

所以, 相对应的状态空间方程为:

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (7)$$

观测方程则可利用结构响应的通解来建立:

$$z(x, t) = h(\theta, x, t) + V \quad (8)$$

式中:

$$h(\theta, x, t) = \sum_{n=1}^N \{ \phi_n(x) \} q_n(t) = \sum_{n=1}^N \{ \phi_n(x) \} \left(e^{-\xi_n \omega_n t} \left(q_{n0} \cos(\omega_{dn} t) + \frac{\dot{q}_{n0} + \xi_n \omega_n q_{n0}}{\omega_{dn}} \sin(\omega_{dn} t) \right) \right) \quad (9)$$

收稿日期: 2022-01-10

作者简介: 戴霖(1989—), 男, 硕士, 工程师, 从事水利工程设计、规划及安全评估工作。

V 为测量噪声。

根据状态方程和量测方程,直接套用扩展卡尔曼滤波算法,经化简后其递推公式为:

状态预测方程:

$$\tilde{\theta}_{j+1}=\hat{\theta}_j \quad (10)$$

预测误差协方差矩阵:

$$\tilde{P}_{j+1}=P_j \quad (11)$$

增益矩阵:

$$K_{j+1}=\tilde{P}_{j+1}H_{j+1}^T(H_{j+1}\tilde{P}_{j+1}H_{j+1}^T+R_{j+1})^{-1} \quad (12)$$

状态估计方程:

$$\hat{\theta}_{j+1}=\tilde{\theta}_{j+1}+K_{j+1}[z_{j+1}-h(\tilde{\theta}_{j+1})] \quad (13)$$

估计误差协方差矩阵:

$$P_{j+1}=(I-K_{j+1}H_{j+1})\tilde{P}_{j+1} \quad (14)$$

式中: H_j 为非线性函数 $h(\theta, x, t)$ 的雅克比矩阵;

$$H_j=\left[\frac{\partial h_j(\hat{\theta}_j)}{\partial \hat{\theta}_j}\right]=\left[\frac{\partial h_j}{\partial q_{10}} \cdots \frac{\partial h_j}{\partial q_{N0}} \frac{\partial h_j}{\partial \dot{q}_{10}} \cdots \frac{\partial h_j}{\partial \dot{q}_{N0}} \frac{\partial h_j}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial h_j}{\partial \alpha_M} \frac{\partial h_j}{\partial \beta_1} \cdots \frac{\partial h_j}{\partial \beta_N}\right] \quad (15)$$

当结构质量不变,上式计算中所需的 $\partial \omega_n / \partial \alpha_i$ 、 $\partial \phi_n / \partial \alpha_i$ (即固有频率和模态关于损伤参数的灵敏度)可用基准有限元模型计算^[6]。

由上述多自由度体系的公式推导中可以看出,将模态转换理论应用在扩展卡尔曼滤波中,利用模态坐标转换对传统 EKF 的状态向量进行处理,构建以模态坐标初始值和结构损伤参数的状态向量后,对于复杂结构,可以选取相应的模态阶数进行计算,达到缩减状态向量维数的效果,从而保证本文改进算法的稳定性。

2 数值算例分析

为利用上述方法来验证改进的 EKF 算法在结构参数识别上的实用性,本文以一个三自由度弹簧质点结构模型为例(见图 1)进行验证。

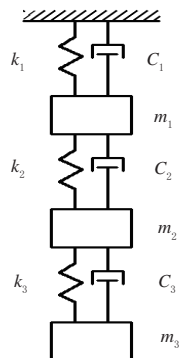


图 1 弹簧质点结构模型

本文数值仿真算例中的各单位采用无量纲化进行处理^[7]。三自由度弹簧质点结构模型参数为:弹簧质点质量 m_1, m_2, m_3 均为 5; 弹簧原始刚度 k_{01}, k_{02}, k_{03} 均为 200; 弹簧原始阻尼比 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 均为 0.03; 根据式(4)、式(5),假定弹簧质点结构模型损伤后各弹簧刚度损伤因子 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为 0.9、0.8、0.7; 各弹簧阻尼比损伤因子 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别为 1.1、1.15、1.2。

本文通过 MATLAB 软件进行计算,在初始条件下,提取自由振动下各个弹簧质点的位移响应信号作为观测值,并同时加入高斯白噪声模拟观测噪声的影响,对结构响应数据中无噪声、5%噪声和 15% 噪声 3 种情况分别给出识别结果。

(1) 无噪声下识别结果见图 2、图 3。

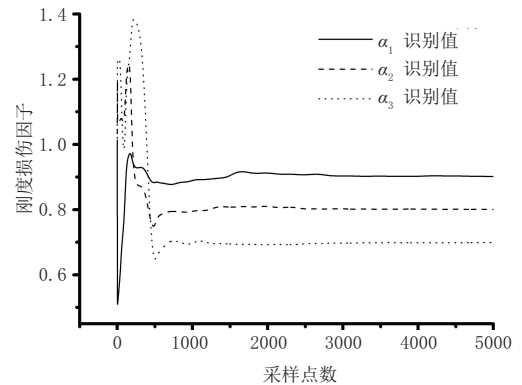


图 2 刚度损伤参数收敛曲线(无噪声)

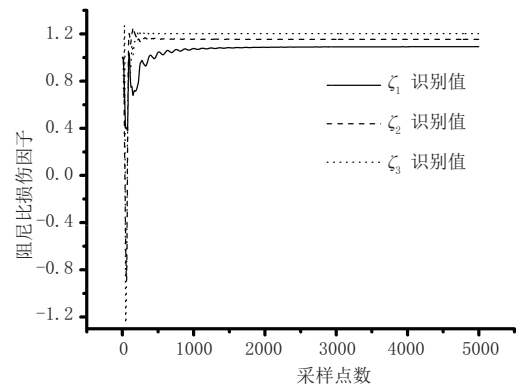


图 3 阻尼比损伤参数收敛曲线(无噪声)

(2) 5% 噪声下识别结果见图 4、图 5。

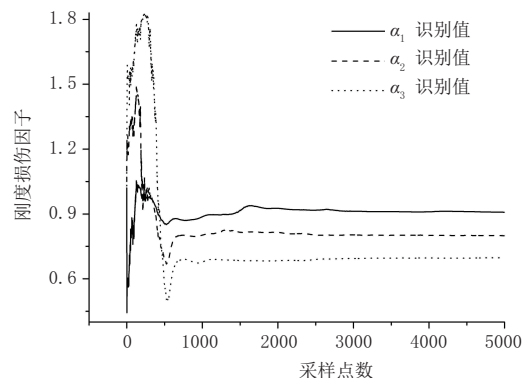


图 4 刚度损伤参数收敛曲线(5%噪声)

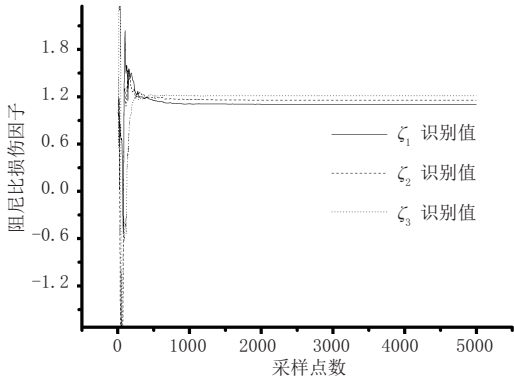


图5 阻尼比损伤参数收敛曲线(5%噪声)

(3)15%噪声下识别结果见图6、图7。

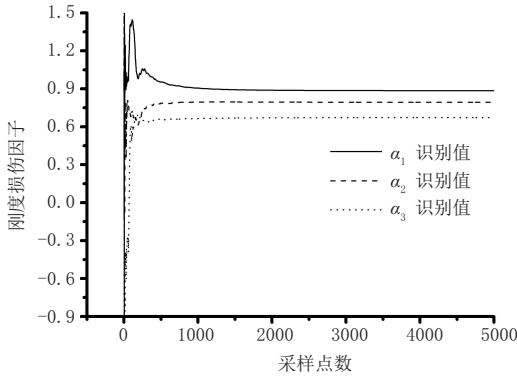


图6 刚度损伤参数收敛曲线(15%噪声)

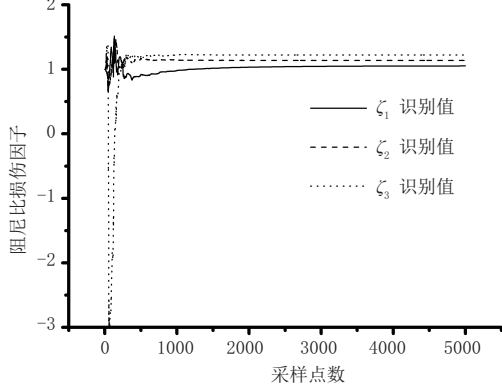


图7 阻尼比损伤参数收敛曲线(15%噪声)

由图2至图7结构各损伤因子的收敛曲线可以看出,在不同级别噪声情况下,各个损伤参数的识别结果均可以快速识别,均能够在短时间内收敛且稳定趋近于真实值。由表1、表2中结构各损伤因子的识别结果可以看出,本文改进算法可以对结构损伤后的刚度及阻尼参数进行识别,且识别效果较好、精度较高。随着噪声逐级增加,虽然损伤因子的相对误差也会相应变大,但是各个参数识别结果的精度均较高。表1中,刚度损伤因子识别结果最大相对误差为

表1 刚度损伤因子识别结果

损伤因子	真实值	无噪声识别值	误差 /%	5%噪声识别值	误差 /%	15%噪声识别值	误差 /%
α_1	0.90	0.899	0.11	0.892	0.22	0.885	1.62
α_2	0.80	0.805	0.58	0.803	0.21	0.794	0.80
α_3	0.70	0.699	0.15	0.698	0.30	0.688	1.71

表2 阻尼比损伤因子识别结果

损伤因子	真实值	无噪声识别值	误差 /%	5%噪声识别值	误差 /%	15%噪声识别值	误差 /%
ζ_1	1.10	1.092	0.73	1.095	0.45	1.069	2.82
ζ_2	1.15	1.154	0.35	1.130	1.74	1.141	0.78
ζ_3	1.20	1.201	0.08	1.238	3.16	1.160	3.33

1.71%。表2中,阻尼比损伤因子识别结果最大相对误差为3.33%。可见,本文算法具有良好的识别效果。

3 结论

本文在扩展卡尔曼滤波算法的基础上,结合模态坐标变换,提出了一种改进的扩展卡尔曼滤波算法,并将该算法对一多自由度弹簧质点系统进行了数值算例计算。结构参数识别结果表明,该算法可以对结构参数进行有效识别,精度较高,证明了该算法在结构参数识别领域当中的可行性。因此,对于复杂结构损伤参数识别的问题,可以在此基础上进一步验证。

参考文献:

[1] Li Zhou, Tengfei Mu, Xin Li, et al. Adaptive sequential nonlinear LSE for structural damage tracking with incomplete measurements[J]. Journal of Vibroengineering. 2013, 15(2): 824-832.

[2] 尚久铨. 卡尔曼滤波法在结构动态参数估计中的应用[J]. 地震工程与工程震动, 1991, 11(2): 62-72.

[3] 吴子燕, 丁兰, 刘书奎. 基于广义卡尔曼滤波的桥梁结构物理参数识别的子结构法[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(3): 425-428.

[4] 雷鹰, 李青. 基于扩展卡尔曼滤波的框架柱节点地震损伤识别[J]. 土木工程学报, 2013(增刊1): 251-255.

[5] 戴霖. 基于扩展卡尔曼滤波的结构损伤识别方法[D]. 南昌: 南昌大学, 2014.

[6] Benedikt Weber, Patrick Paultre, Jean Proulx. Consistent regularization of nonlinear model updating for damage identification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23: 1965-1985.

[7] 陈立群. 一类质量黏弹性弹簧系统的简谐受迫振动[J]. 力学与实践. 2001. 23(5): 49-52.