

基于VMD-HHT的简支梁动力参数识别方法研究

耿泽

[同济大学建筑设计研究院(集团)有限公司,上海市 200092]

摘要: 为了准确识别车辆通过桥梁产生的动力响应,提出一种变分模态分解(Variational Mode Decomposition, VMD)法和希尔伯特-黄变换(Hilbert-Huang Transform, HHT)边际谱结合排列熵的桥梁结构动力参数识别方法:首先,通过VMD对原始振动信号进行信号分解,得到多个本征模态函数(Intrinsic Mode Function, IMF)分量;其次,计算各个IMF分量的排列熵,利用信号越稳定排列熵值越小的特点,筛选出排列熵值较小的IMF分量;最后,对其进行HHT变换,得到各个IMF分量的边际谱。仿真与实例的计算结果表明:采用该方法,能够有效识别车辆过桥时桥梁产生的动力响应并适应桥梁竖向频率较低的特点,准确提取在车辆激励下的桥梁竖向频率;车速、路面不平度和车重这3个因素对VMD-HHT边际谱的计算结果影响较小。所得结果为桥梁结构安全运营和健康状态评价提供了参考。

关键词: 动力响应;变分模态分解(VMD);边际谱;排列熵;竖向频率

中图分类号: U441+.3; U446.1

文献标志码: A

文章编号: 1009-7716(2025)02-0283-06

Study on Dynamic Parameter Identification Method of Simple-supported Beam Based on VMD-HHT

GENG Ze

[Architectural Design and Research Institute (Group) Co., Ltd., Tongji University, Shanghai 200092, China]

Abstract: In order to accurately identify the dynamic response of bridges caused by vehicle passage, a bridge structural dynamic parameter identification method is proposed by combining the variational mode decomposition (VMD) method and Hilbert-Huang transform (HHT) marginal spectrum with permutation entropy. Firstly, the original vibration signal is decomposed by VMD to obtain the multiple Intrinsic Mode Function (IMF) components. And then the permutation entropy of each IMF component is calculated. The IMF component with the lower permutation entropy is selected by using the characteristic that the more stable the signal is, the smaller the permutation entropy is. Finally, the HHT transformation is performed to obtain the marginal spectra of each IMF component. Compared with the calculation results of an example through simulation, the result shows that the method can effectively identify the dynamic response of the bridge caused by vehicle passage and also adapt to the lower vertical frequency of the bridge. The vertical frequency of the bridge under vehicle excitation is accurately extracted. The factors of vehicle speed, pavement roughness and vehicle weight have little effect on the calculation results of VMD-HHT marginal spectra. The results may provide a reference for the safe operation and health status evaluation of bridge structures.

Keywords: dynamic response; variational mode decomposition (VMD); marginal spectrum; permutation entropy; vertical frequency

0 引言

随着社会的发展,交通建设受到了广泛的关注。其中,桥梁作为交通运输的重要环节,保障其安全稳定运营对于人们的生命安全和财产安全具有重要意义。然而,随着车辆的不断增多,桥梁在车辆通过时受到的动力载荷不断增大,桥梁结构的动力响应也

不断增强,桥梁的安全问题日益突出。因此,识别桥梁结构动力响应并评价桥梁状况显得尤为重要。

传统的桥梁基频识别方法是以传统的傅里叶变换为基础的模态分析方法。傅里叶变换擅长处理平稳信号,但是对噪声干扰下的非平稳、非线性信号就难以保证准确性。桥梁信号具有多阶、高敏感性和强噪声等特点,所以模态测试的采集时间一般不小于30 min,测试时间较长,时间消耗大,会对交通产生很大的困扰。

Yang等^[1]在2004年率先利用移动车辆响应信号

收稿日期: 2024-02-29

作者简介: 耿泽(1990—),男,硕士,工程师,从事桥梁设计工作。

获取桥梁固有频率的方法,推导出车辆过桥时的竖向振动响应解析解。随后,Yang等^[2]通过数值分析和希尔伯特变换的方法,成功识别了简支梁的振动模式,并且得到了桥梁振动模式的解析解;此外,还分析了桥面粗糙度、车辆流量和车辆速度对振动模式的具体影响。

近年来,为了快速准确地对桥梁基频进行识别,众多学者开展了相关研究。Qi等^[3]在冲击激励的条件下,通过分析车辆的动态响应来确定桥梁的振动模式,并且使用单轴车在低速行驶的情况下成功识别了连续梁桥的前3个主要振动模式。陈上有等^[4]根据车辆加速度响应的频谱分析,识别出桥梁结构的基础频率,分析了不同的桥梁阻尼比、车体弹簧刚度、车桥质量比、车辆移动速度等因素对桥梁基频识别效果的影响。孔烜等^[5]提出了一种参数可调的移动检测车辆,通过车-桥耦合振动理论,推导出“拖车-双挂车”过桥振动响应的解析解,并与现场试验结果进行对比验证,发现在车辆低速情况下,桥梁频率识别效果较好。亓兴军等^[6]通过提取车辆匀速通过平整桥面时的振动加速度响应,并结合带通滤波和汉宁窗技术,分离出了与桥梁固有频率相关的响应分量,利用桥频分量响应及其希尔伯特变换,即可构造出与每阶固有频率相对应的振型。该方法虽然能够识别高阶桥梁模态,但桥面粗糙度和白噪声会对其结果造成较大影响。张文武等^[7]利用铰接车辆过桥,在文献^[6]的基础上降低了桥面粗糙度对桥梁频率提取的影响。李岩等^[8]利用盲源分离算法,将车桥接触点响应信号中的桥面不平度效应与桥梁振动响应分离,进而实现桥梁模态识别。

目前大部分研究主要是通过车辆在车上安装传感器来采集车辆过桥时的加速度,从而识别桥梁模态和频率。然而,检测车辆的改造和车辆自振对结果都有难以定性的影响。为此,本文提出一种在桥梁主梁上布置传感器,得到车辆过桥时的动挠度曲线或动应变曲线,再利用变分模态分解(Variational Mode Decomposition, VMD)^[9]和希尔伯特-黄变换(Hilbert-Huang Transform, HHT)边际谱^[10-11]并结合排列熵的方法来分析车辆过桥时的桥梁动态响应信号。VMD法可将振动信号分解成由低阶振动频率到高阶振动频率的一系列固有模态函数(Intrinsic Mode Function, IMF)分量,实现对原始信号的分解。VMD法可以克服经验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD)方法中存在的能量混叠问题和

端点效应等问题,相对于集合经验模态分解(Ensemble Empirical Mode Decomposition, EEMD)方法,VMD法抗噪能力更好,并且运算效率更高^[12-14];而通过排列熵对IMF分量进行筛选时,由于排列熵越大信号越随机,因此选取排列熵值较小的IMF分量;最后利用HHT法对筛选出的IMF分量计算其边际谱。仿真和实例计算结果表明,本文所提方法能有效提取移动车辆激励下的桥梁振动频率,为桥梁结构安全运营和健康状态评价提供参考。

1 基本原理

1.1 变分模态分解理论

变分模态分解(VMD)方法是一种非递归式的自适应信号分解方法,它将原始信号 $x(t)$ 分解为 K 个离散的模态,即固有模态函数(IMF),每个IMF被定义为一个调幅-调频信号,其表达式为:

$$u_k(t) = A_k(t) \cos[\phi_k(t)] \quad (1)$$

$\omega_k(t)$ 为 $u_k(t)$ 的瞬时频率,表达式为:

$$\omega_k(t) = \phi'_k(t) = \frac{d\phi_k(t)}{dt} \quad (2)$$

为了最小化每个IMF分量的估计带宽之和,构建了信号分解的变分模型。

1.2 HHT 边际谱

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transformation, FFT)方法所识别的频率反映了一个正弦波或余弦波在整个时间序列中的持续存在,而HHT方法的边际谱峰值表示各个频率在振幅上的集中累积。对于桥梁动力响应这类非线性和非平稳的信号,HHT方法的边际谱在识别频率方面,相较于FFT频谱显示出更明显的优势。

对VMD分解计算出来的各个IMF分量首先做Hilbert变换后,原始信号 $x(t)$ 则可由下式表示:

$$u_k(t) = R \left\{ \sum_{j=1}^n a_j(t) \exp \left[i \int \omega_j(t) dt \right] \right\} \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (3)$$

式中: ω 的函数 $H(\omega, t)$ 称为Hilbert谱(HHT谱),即:

$$H(\omega, t) = R \left\{ \sum_{j=1}^n a_j(t) \exp \left[i \int \omega_j(t) dt \right] \right\} \quad (4)$$

对式(4)进行时间积分,得到Hilbert边际谱:

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t) dt \quad (5)$$

1.3 排列熵

排列熵能准确地捕捉到非线性和非平稳信号在

时间序列中的细微变动,在机械诊断方面已经得到了应用^[15-17],在桥梁领域则应用很少。为了筛选出有效的 IMF 分量进行分析,通过应用排列熵算法,对于 n 个重构向量对应的符号序列,排列熵可表示为:

$$H_p(m) = -\sum_{j=1}^n P_j \ln(P_j) \quad (6)$$

将 $H_p(m)$ 进行归一化处理后得到的 H_p 就是 IMF 分量的排列熵, H_p 计算值越大,说明信号越随机,否则表明信号越平稳。排列熵计算结果受到延迟时间 τ 和嵌入维数 m 的显著影响。本文利用互信息函数法和 Cao 方法,分别计算了延迟时间 τ 和嵌入维数 m ^[18]。结果显示: m 值越大,计算耗时越大, m 值越小,重构的向量中包含的状态越少,此时算法将失去意义;而一般延迟时间 τ 对时间序列影响较小。受篇幅限制,本文不对延迟时间 τ 和嵌入维数 m 作过多赘述,仅针对桥梁信号特点将嵌入维数 m 取值 6,延迟时间 τ 取值 3。

2 车桥耦合振动方程简化

仅考虑竖向 1 阶,则移动弹簧-质量对梁的跨中振动方程可简化为下式^[15]:

$$\begin{aligned} M_B \ddot{y}_c + c_B \dot{y}_c + k_B y_c &= (M_v g + k_v \Delta) \varphi(t) \\ M_{vs} \ddot{z} + c_v \dot{z} + k_v z &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\Delta = z - y_c \varphi(t)$, $M_v = M_{vs} + M_{vu}$, $k_B = ml\omega_1^2/2$, $M_B = ml/2 + M_{vu}\varphi^2(t)$; y_c 为梁的强迫振动位移; $\varphi(t)$ 为桥梁振型函数, $\varphi(t) = \sin(\pi vt/l)$; z 为 M_{vs} 的绝对位移。

由于梁的弯曲抵抗刚度通常要比汽车悬挂系统的弹簧刚度大得多,因此梁的弯曲变形量相比于弹簧上的质量移动量要小得多,则式(7)可以简化为:

$$\begin{aligned} M_B \ddot{y}_c + c_B \dot{y}_c + k_B y_c &= (M_v g + k_v z) \varphi(t) \\ M_{vs} \ddot{z} + c_v \dot{z} + k_v z &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

簧上质量的动力平衡方程可以看成为有阻尼自由振动,簧上质量的位移方程为:

$$z(t) = e^{-\zeta_v \omega_v t} \left[u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta_v \omega_v u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \quad (9)$$

$$\omega_D = \omega_v \sqrt{1 - \zeta_v^2}$$

式中: $\omega_v = \sqrt{k_v/M_{vs}}$; ζ_v 为弹簧阻尼比。可以将 $z(t)$ 看成 $z(t) = C \cos(\omega_D t + \alpha)$, 代入式(8)的桥梁振动方程,此时可以将移动弹簧-质量对梁的跨中振动方程看成在谐振力作用下的运动控制微分方程。利用三角函数关系,则跨中简化振动方程为:

$$\begin{aligned} M_B \ddot{y}_c + c_B \dot{y}_c + k_B y_c &= M_v g \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) + \\ &+ \frac{k_v C}{2} \sin\left(\frac{\pi vt}{l} - \omega_D t - \alpha\right) + \frac{k_v C}{2} \sin\left(\frac{\pi vt}{l} + \omega_D t + \alpha\right) \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10)可知:移动弹簧-质量的梁强迫振动的稳态部分是由频率为 $\sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right)$ 、 $\sin\left[\left(\frac{\pi v}{l} - \omega_D\right)t\right]$ 和 $\sin\left[\left(\frac{\pi v}{l} + \omega_D\right)t\right]$ 的三角函数曲线组成的。假定车体质量 M_{vu} 是一个始终与桥梁保持密切接触的不跳动质量,桥梁的竖向频率为 $\omega_1 = \frac{k_B}{M_B}$, 则强迫振动所伴生的自由振动项是频率为 $\sin(\omega'_1 t)$ 的三角函数曲线,其中 $\omega'_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_B^2}$, ζ_B 为桥梁阻尼比。

在实际桥梁中,荷载通过桥梁的时间通常远大于桥梁的基本周期,即 $\frac{\pi v}{l}$ 远小于 ω_1 , 并且工程中更关心桥梁基频,所以下文将针对桥梁的基频提取作出研究。

3 仿真桥梁频率的识别

3.1 桥梁模型

本文使用 ANSYS 分析软件建立桥梁有限元模型,采用 BEAM3 单元作为梁单元。设置模型参数如下:

桥梁跨径 16 m,材料弹性模量 $E=2.46 \times 10^{11}$ N/m²,梁截面长宽高均为 1 m,梁截面惯性矩 0.083 m⁴,桥梁结构单位长度质量 9.36×10^3 kg/m,阻尼比 0.05。

由 $\omega'_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_B^2}$ 可以得到竖向 1 阶振动频率理论值为 $\omega'_1 = 9.069$ Hz。

3.2 车辆模型

在 ANSYS 软件中分别建立车辆模型和桥梁模型,但将两者放在同一工作环境中,保持独立。通过 APDL 语言编写脚本,可以在任意时刻施加车辆和桥梁结构之间的接触耦合关系。在车辆仿真模型中,采用 ANSYS 中的 MASS21 单元来模拟车体和车轮的质量,采用 COMBIN14 单元来模拟悬挂系统中的弹簧,并可以赋予弹簧不同的阻尼系数。

其中车体质量为 4.69×10^3 kg,车轮质量 1.69×10^3 kg,弹簧刚度 4.87×10^6 N/m,阻尼系数取 3.14×10^5 N·s/m。

3.3 不同车速和不平整度

道路的不平整度是引起车辆振动系统振动的主

要因素之一。在道路的作用下,车辆的耦合振动表现为随机性质的振动。本文采用《机械振动道路路面谱测量数据报告》(GB/T 7031—2005)提出的公路路面功率谱,选择在 $0.06\sim 3\text{ m}^{-1}$ 的空间频率范围对路面功率谱进行分析,其具体计算方法见文献[19],本文不再赘述。

利用ANSYS软件让车辆模型以30、60、90 km/h的速度经过桥梁模型,路面为A级路面。跨中动挠度时程曲线见图1。

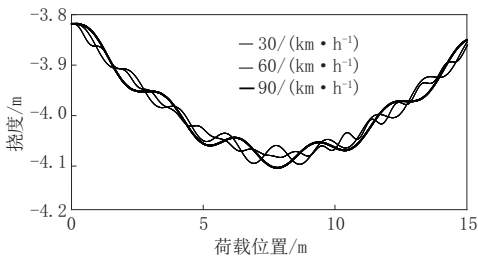


图1 不同车速的动挠度曲线

首先,利用VMD方法对不同车速的车辆动挠度进行分析。对原始信号进行VMD分析时,参数 a 取值2 000;噪声参数 t_{nn} 取值0.9;分解IMF个数 K 取值5,并利用排列熵对结果进行筛选,结果见表1。

表1 不同车速的IMF分量的排列熵值

车速/ ($\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5
30	0.19	0.25	0.58	0.67	0.79
60	0.18	0.79	0.22	0.80	0.59
90	0.16	0.42	0.68	0.90	0.86

VMD方法可以很好地处理低阶振动频率。由于VMD分解不同的 K 值可能会造成原始信号的过度分解或分解不足,导致频率识别出现困难,为此引入排列熵对各个IMF分量进行平稳性的量化评估。为了保证振动信号边际谱峰值光滑明显,本文建议对 H_p 值小于0.5的IMF分量进行后期分析。对表1中IMF分量的排列熵值小于0.5的IMF分量计算其HHT边际谱,结果见图2。

车辆再以30、60、90 km/h的速度经过桥梁模型,路面分别为光滑、A、B、C级路面。计算结果见表2。

由表2可知,路面不平整度对结果基本上没有影响。在不同车速下桥梁跨中竖向1阶最小计算频率为8.854 Hz,最大计算频率为9.375 Hz,与3.1节中计算理论值9.069 Hz分别相差2.37%和3.37%。

3.4 不同车重

由于常规动载试验或随机车流的车辆荷载很难保证准确称重,所以在实际应用中,车辆荷载应该是

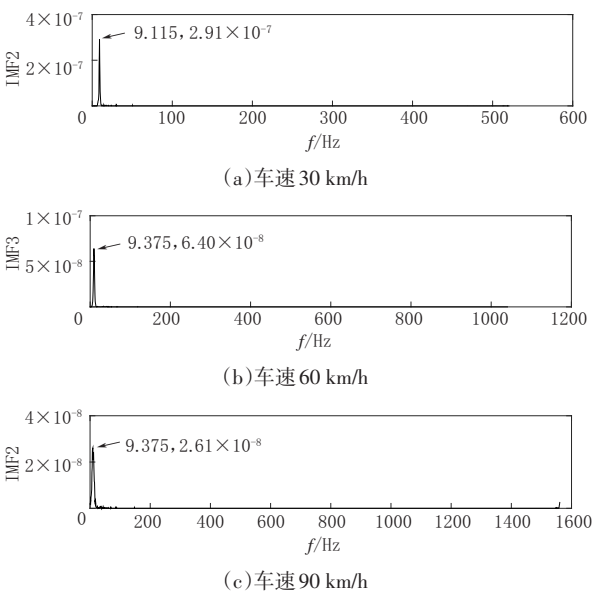


图2 不同车速的HHT边际谱

表2 不同车速和不平整度下仿真模型的HHT边际谱 单位:Hz

车速/ ($\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)	光滑路面桥 梁频率	A级路面桥 梁频率	B级路面桥 梁频率	C级路面桥 梁频率
30	8.854	9.115	9.115	9.115
60	9.375	9.375	9.375	9.375
90	9.375	9.375	9.375	9.375

一个变值。在上文基础上让车辆以不同车速和车重经过光滑路面桥梁模型,得到IMF分量的排列熵值,见表3。

表3 不同车重的IMF分量的排列熵值

车速/ ($\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)	M_{vs}/kg	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5
30	4.69×10^3	0.12	0.13	0.28	0.36	0.86
	9.38×10^3	0.12	0.13	0.36	0.79	0.79
	1.88×10^4	0.11	0.13	0.35	0.70	0.79
60	4.69×10^3	0.18	0.28	0.89	0.80	0.81
	9.38×10^3	0.12	0.16	0.25	0.78	0.68
	1.88×10^4	0.12	0.13	0.25	0.76	0.63
90	4.69×10^3	0.13	0.17	0.18	0.23	0.69
	9.38×10^3	0.13	0.14	0.30	0.23	0.67
	1.88×10^4	0.13	0.13	0.22	0.80	0.72

选取表3中排列熵值小于0.5的IMF分量,计算其HHT边际谱,并筛选出合理振动振型。边际谱计算结果见表4。

比较可知,表4数据与表2数据保持一致,说明不同车辆荷载对HHT边际谱计算结果影响较小。

综上可知,车速、路面不平整度和车重这3种因素对VMD-HHT边际谱计算结果的影响较小,即VMD-HHT边际谱结合排列熵的方法在理论计算中

M_{vs}/kg	车速/ $(\text{km}\cdot\text{h}^{-1})$		
	30	60	90
4.69×10^3	9.115	8.854	9.375
9.38×10^3	9.375	9.375	9.375
1.88×10^4	9.115	9.375	9.375

准确性较高。

为了方便后续工作,将振动信号频率识别流程图示于图3。

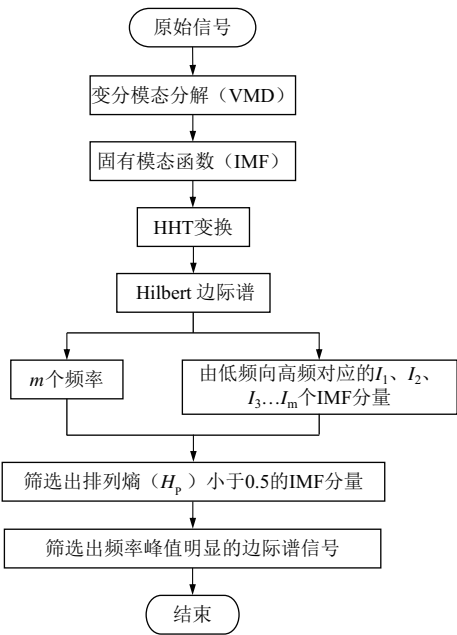


图3 振动信号频率识别流程图

4 VMD分析在实际工程中的应用

以福建某座长度为20 m跨径的PC简支小箱梁为例,其道路横断面布置为:0.5 m(防撞护栏)+净6.5 m(行车道)+0.5 m(防撞护栏)=7.5 m,行车道为双向2车道。桥面铺装为:厚10 cm防水混凝土+SBR改性乳化沥青封水层+厚8 cm C40聚丙烯网状纤维混凝土调平层。下部结构采用柱式桥墩,柱式台,钻孔灌注桩基础。

利用VMD-HHT边际谱,分析该桥梁在跑车试验中的挠度时程曲线,并与MIDAS Civil建模计算和现场桥梁在随机车流环境下模态测试采集模块测定的桥梁频率进行对比。

4.1 环境激励测试

环境激励是一种自然的激励方式,它不需要昂贵的激励设备,也不会干扰桥梁的常规运行。这种方法直接利用桥址附近的风载、地脉动、水流、车辆和行人等随机荷载来激发桥梁结构的微小振动。通

过使用振动传感器、动态信号测试分析系统和计算机,可以捕捉并记录桥梁的脉动加速度反应。这种脉动测试通常持续时间较长,每个测点的记录时间通常不少于20 min。测点应该安置在桥梁结构振型的峰值和谷值位置,以便进行多点和多方向的测量。

首先利用MIDAS Civil建模(见图4),计算出理论桥梁自振频率。其次进行现场模态试验,设备选用DH5907N无线桥梁模态测试分析系统(东华测试)。沿桥纵向在第2跨的 $L/4$ 、 $L/2$ 、 $3L/4$ 位置布置拾振器,振动传感器被垂直安装于桥面,目的是为了测量桥梁的竖直振动反应。将采集到的桥面振动加速度时程响应通过FFT变换得到频谱图(见图5),由图5可以较好地提取该桥的前2阶自振频率。

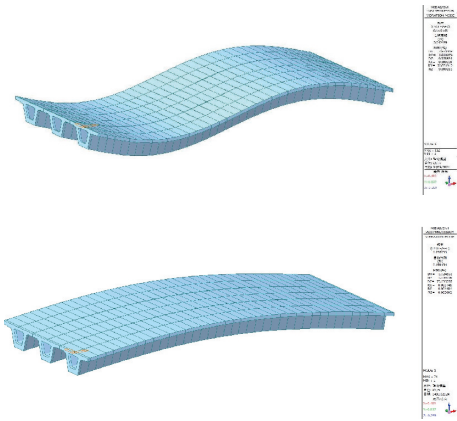


图4 桥梁前2阶竖向振型

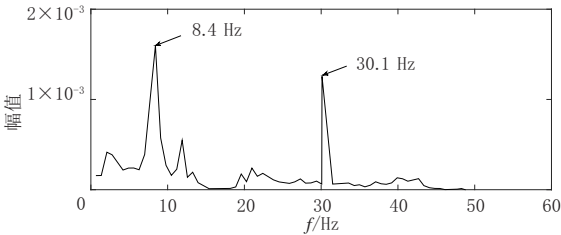


图5 频域曲线

理论桥梁自振频率和模态实测值列于表5。由表5可见,实测值均大于理论计算值,这一结果表明了结构的整体刚性是相对较强的。

表5 模态测试结果		单位:Hz
振动阶次	MIDAS 计算值	模态实测值
竖向第1阶	6.284	8.41
竖向第2阶	23.536	30.11

4.2 跑车测试结果

采用300 kN的重车进行加载试验,车辆沿着桥梁轴线的方向行驶,车速分别为10、20、30 km/h。通过桥梁现场动态应变采集系统,记录桥梁在车辆冲击载荷作用下的动态应变数据,并在梁跨中部的底

部安装动态应变传感器,得到不同车速下的应变时程曲线,见图6。

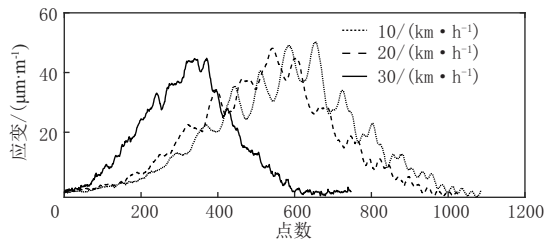


图6 不同车速的应变时程曲线

对动应变时程曲线进行VMD-HHT边际谱分析。利用第3节结论,针对桥梁基频为低阶振动频率的特性,仅对排列熵值小于0.5的IMF分量计算其HHT边际谱。车速10~30 km/h的边际谱排列熵分别为0.489、0.491和0.495,其HHT边际谱计算结果见图7和表6。

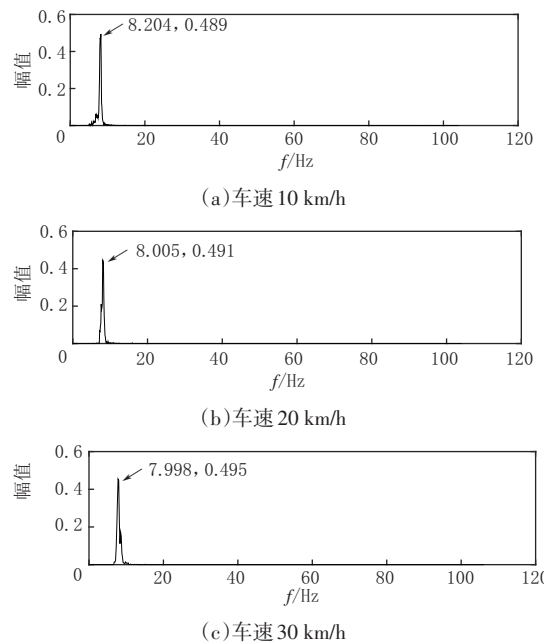


图7 不同车速的HHT边际谱

表6 测试结果对比

车速/(km·h ⁻¹)	VMD-HHT 边际谱 计算值/Hz	实测值与计算值的 相对误差/%
10	8.204	2.45
20	8.005	4.82
30	7.998	4.90

注:竖向第1阶模态实测值为8.41 Hz。

由上述计算结果可知,在不同车速下,模态实测值与VMD-HHT边际谱计算的桥梁竖向第1阶频率之间的相对误差最小为2.45%,最高为4.90%,且排列熵值均小于0.5。根据上节结论,实测VMD-HHT边际谱均为有效值。由此说明,VMD-HHT边际谱的计算方法在实际工程中具有一定的参考价值。

5 结 语

(1)通过理论计算和实际工程应用,VMD-HHT边际谱对桥梁特有的低阶振动频率具有较好的识别性,并且排列熵可以很好地解决针对VMD分解不同的K值会造成原始信号的过度分解或分解不足,导致频率识别出现困难的问题。

(2)车速、路面不平整度和车重这3种因素对VMD-HHT边际谱的计算结果影响较小。

(3)本文提出的方法,通过从车桥耦合振动下的应变时程曲线来提取桥梁的基频,不用中断交通,提高了测试的效率,降低了传统测试方法的社会成本,对监测数据的有效选取、去噪、分析有一定的实际应用价值。通过对车辆过桥时桥梁振动信号的再处理,有效挖掘了桥梁振动信号的深度价值,提升了桥梁健康监测系统的成本-效益比。

参考文献:

[1] YANG Y B, LIN C W, YAU J D. Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 272(3): 471-493.

[2] YANG Y B, LI Y C, CHANG K C. Constructing the mode shapes of a bridge from a passing vehicle: A theoretical[J]. Study Smart Structures and Systems, 2014, 13(5): 797-819.

[3] QI Z Q, AU F T K. Identifying mode shapes of girder bridges using dynamic responses extracted from a moving vehicle under impact excitation[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2017, 17(8): 1-20.

[4] 陈上有,夏禾.从过桥车辆响应中识别桥梁结构基本自振频率的方法[J].工程力学,2009,26(8): 88-94.

[5] 孔烜,李思琪,韩振勇,等.适用于中小跨径桥梁频率识别的移动检测车辆参数研究[J].湖南大学学报(自然科学版),2023,50(7): 12-22.

[6] 亓兴军,肖志全,孙绪法,等.基于车辆响应的连续梁桥振型识别数值模拟及影响参数分析[J].地震工程与工程振动,2021,41(4): 28-37.

[7] 张文武,亓兴军,肖志全,等.铰接车辆模型识别粗糙桥梁频率和振型的数值分析[J].建筑科学与工程学报,2022,39(2): 119-127.

[8] 李岩,施雪晴,刘文.基于车桥接触点响应和盲源分离的桥梁模态识别[J].湖南大学学报(自然科学版),2023,50(5): 55-64.

[9] DRAGOMIRETSKIY K, ZOSSO D. Variational mode decomposition[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2014, 62(3): 531-544.

[10] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis [J]. Proceedings of the Royal Society of London-Series A, 1998(454): 903-995.

[11] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert spectrum [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1999, 31(1): 417-457.

[12] 张云强,张培林,王怀光,等.结合VMD和Volterra预测模型的轴