

DOI:10.16799/j.cnki.esdqyfh.2024.10.058

吊索动力特性分析方法与工程应用

廖霞¹, 顾民杰², 赵荣欣³, 淡丹辉¹, 韩飞⁴

[1.同济大学 土木工程学院桥梁工程系,上海市 200092; 2.上海市政工程设计研究总院(集团)有限公司,上海市 200092;
3.上海市建筑科学研究院有限公司,上海市 200030; 4.西北工业大学 力学与土木建筑学院,陕西 西安 710100]

摘要: 吊索作为索承桥梁的重要受力构件,决定着桥梁的承载力和耐久性,研究其动力特性对悬索桥和拱桥的设计和运营维护具有极大意义。首先运用动刚度法(DSM)得到了吊索在任意边界条件下的频率方程,并结合 Wittrick-Williams (W-W)算法,提出了吊索振动模态频率精确的计算方法,形成了一套适用于吊索动力特性分析的精细化分析理论;其次利用模型参数退化、文献方法以及有限元建模求解来进行准确性验证;最后通过与明州大桥实测数据对比表明该分析理论在实际工程中具有较好的可行性。该理论体系为吊索动力特性的进一步研究提供了参考,并在一定程度上指导实际工程吊索的设计和监测。

关键词: 吊索;动力特性;动刚度法;Wittrick-Williams 算法;模态频率

中图分类号: U441

文献标志码: A

文章编号: 1009-7716(2024)10-0255-05

0 引言

已有工程案例的统计分析表明,目前桥梁吊索的平均寿命只有十几年^[1],部分吊索的服役寿命甚至不到十年。由于吊索维修与更换的代价是巨大的,其动力学特性分析的重要性远远超越了静力分析,已成为此类桥梁结构设计、运营期性能监控和维护、振动控制的关键问题。

目前已有的索缆动力分析理论按分析方法以及解形式的不同可分为解析法、数值法以及半解析半数值法^[2]。解析法是通过求解基于张紧弦和梁理论所建立的偏微分方程来进行动力分析,但考虑吊索实际抗弯刚度和复杂边界条件时,解析法将失去求解能力^[3-4]。为此,数值法在索类结构求解中取得了一定的成功^[5-6],但其求解精度极大程度取决于网格化分的精细程度,高精度的解往往需要更大计算量。

本文采用的动力刚度法是一种半解析-半数值方法,该方法从系统精确的振型函数出发,得到闭合形式的频率方程和动力方程,具有一定的准确性和

高效性^[7]。相对于工程中常用的有限元方法(FEM)而言,动刚度方法不受结构形式的变化,不需要对不同参数的结构进行不同离散化划分,还能兼顾计算精度和计算效率。

目前,桥梁吊索的研究都是基于斜拉索的研究理论,但吊索抗弯刚度和边界条件对吊索动力特性的影响不容忽视^[8]。基于此,本文基于动刚度方法建立了各边界条件下吊索频率方程,并通过 W-W 算法求解了频率,以参数简化分析和数值解验证了求解的准确性。以明州大桥的实际吊索为例,其动力特性的准确求解证明了本文理论的工程价值。

1 求解方法

1.1 振动控制微分方程

为研究单吊索动力特性,需要几点合理的假定:(1)吊索的材料是线弹性以及吊索在振动过程中始终处于线弹性范围内;(2)吊索的应变较小,其截面大小不发生变化;(3)不考虑吊索索力沿长度发生的变化;(4)吊索仅发生横向平面内的振动,竖轴向振动忽略不计;(5)忽略吊索静构型和垂度对吊索横向振动的影响。为此,建立简化模型如图 1 所示。基于欧拉梁理论,得到考虑抗弯刚度吊索的足自由振动控制微分方程如下^[9]。

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^2} - H \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

收稿日期: 2024-01-19

作者简介: 廖霞(1997—),女,硕士,从事结构健康监测研究工作。

通信作者: 顾民杰(1973—),男,硕士,高级工程师,从事桥梁工程设计工作。电子信箱: guminjie@smedi.com

式中: EI 为吊索的抗弯刚度; $u(x,t)$ 为吊索的横向位移函数; H 为吊索索力; x 为距吊索上端边界的距离; m 为吊索单位长度的质量。

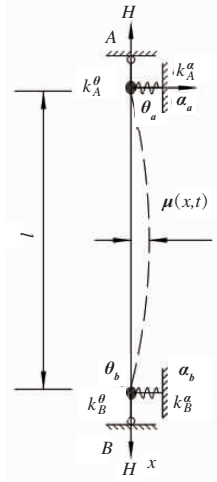


图1 吊索分析模型

1.2 频率方程

根据DSM^[10]假设吊索的横向位移函数 $u(x,t)=\varphi(x)e^{i\omega t}$,其中 ω 为圆频率(rad/s),将位移函数代入式(1)得到:

$$\varphi(\zeta)^{''''}-\gamma^2\varphi(\zeta)''-\tilde{\omega}^2\varphi(\zeta)=0 \quad (2)$$

式中: $\zeta=x/l, \gamma^2=Hl^2/EI, \tilde{\omega}=\omega l^2/\sqrt{EI/m}$ 均为无量纲化参数。

式(2)通解的矩阵表达式为,

$$\varphi(\zeta)=\Phi(\zeta)\{A_1 A_2 A_3 A_4\}^T \quad (3)$$

式中: $\Phi(\zeta)=\{e^{-p\zeta} e^{-p(1-\zeta)} \cos(q\zeta) \sin(q\zeta)\}$, $p(q)=\sqrt{\sqrt{\gamma^2/4+\tilde{\omega}^2} \pm \gamma^2/2}, p^2-q^2=\gamma^2, pq=H\tilde{\omega}=\pi\gamma\tilde{\omega}$,其中 $\omega_0=\pi/l\sqrt{H/m}$ 为吊索的基频, $\{A_1 A_2 A_3 A_4\}^T$ 为与边界条件相关的待定系数矩阵。

由振型函数表征的节点位移,

$$\begin{Bmatrix} \alpha_a \\ \theta_a l \\ \alpha_b \\ \theta_b l \end{Bmatrix} = \frac{l^4}{EI} \begin{Bmatrix} \Phi(\zeta|_{=0}) \\ \Phi'(\zeta|_{=0}) \\ \Phi(\zeta|_{=1}) \\ \Phi'(\zeta|_{=1}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\zeta} G \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中: α 和 θ 为节点A和B的水平和转角位移, $\zeta=EI/l^4$,其中,

$$G = \begin{Bmatrix} \Phi(\zeta|_{=0}) \\ \Phi'(\zeta|_{=0}) \\ \Phi(\zeta|_{=1}) \\ \Phi'(\zeta|_{=1}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ -p & p\varepsilon & 0 & q \\ \varepsilon & 1 & C & S \\ -p\varepsilon & p & -qS & qC \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon=e^{-p}, C=\cos q, S=\sin q$$

根据节点力和位移函数的关系,可以得到,

$$\begin{cases} V(x,t)=(EI\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-H\frac{\partial\varphi}{\partial x})e^{i\omega t}=l(\varphi''''(\zeta)-\gamma^2\varphi'(\zeta))e^{i\omega t} \\ M(x,t)=EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}e^{i\omega t}=l^2\varphi''(\zeta)e^{i\omega t} \end{cases} \quad (5)$$

结合(4)和(5)式以及结点力和结点位移的关系得到,

$$\{V_a M_a/l V_b M_b/l\}^T=l\delta DG^{-1}\{\alpha_a \theta_a l \alpha_b \theta_b l\}^T \quad (6)$$

式中:

$$D = \begin{Bmatrix} \Phi''''(\zeta|_{=0})-\gamma^2\Phi'(\zeta|_{=0}) \\ \Phi''(\zeta|_{=0}) \\ \Phi''''(\zeta|_{=1})-\gamma^2\Phi'(\zeta|_{=1}) \\ \Phi''(\zeta|_{=1}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p^2+\gamma^2p & (p^3-\gamma^2)\varepsilon & 0 & -p^3+\gamma^2q \\ -p^2 & -p^2\varepsilon & q^2 & 0 \\ (-p^3-\gamma^2)\varepsilon & p^3-\gamma^2p & (p^3+\gamma^2q)S & (-p^3-\gamma^2q)C \\ -p^2\varepsilon & -p^2 & q^2C & q^2S \end{Bmatrix}$$

从而获得动态刚度矩阵为,

$$K_1=l\delta DG^{-1} \quad (7)$$

$$\text{式中: } K_1 = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & -K_{14} & K_{24} \\ K_{13} & -K_{14} & K_{11} & K_{12} \\ K_{14} & K_{24} & -K_{12} & K_{22} \end{Bmatrix}$$

$$K_{11}=pq\Delta(p^2+q^2)[(1+\varepsilon^2)qS+(1-\varepsilon^2)pC]$$

$$K_{12}=pq\Delta[-2\gamma^2\varepsilon+2(1-\varepsilon^2)pqS+\gamma^2(1+\varepsilon^2)C]$$

$$K_{13}=pq\Delta(p^2+q^2)[-(1-\varepsilon^2)p-2p\varepsilon S]$$

$$K_{14}=pq\Delta(p^2+q^2)[(1+\varepsilon^2)-2\varepsilon S]$$

$$K_{22}=(p^2+q^2)\Delta[(1+\varepsilon^2)S-q(1-\varepsilon^2)C]$$

$$K_{24}=(p^2+q^2)\Delta[p(1-\varepsilon^2)-2p\varepsilon S]$$

$$\Delta=\frac{1}{4pq\varepsilon-2pq(1+\varepsilon^2)C+\gamma^2(1-\varepsilon^2)S}$$

由吊索的边界条件进一步得到,

$$K(\omega) \begin{Bmatrix} \alpha_a \\ \theta_a l \\ \alpha_b \\ \theta_b l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中: $K(\omega)=$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} K_{11}-\frac{l^3}{EI}K_A^a & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22}-\frac{l^3}{EI}K_A^a & -K_{14} & K_{24} \\ K_{13} & -K_{14} & K_{11}-\frac{l^3}{EI}K_A^a & -K_{12} \\ K_{14} & -K_{24} & -K_{12} & K_{11}-\frac{l^3}{EI}K_A^a \end{Bmatrix}$$

在求得系统的动态刚度矩阵后,系统的各阶模

态频率通常可从以下频率方程中进行求解

$$|K(\omega)|=0 \tag{9}$$

1.3 频率求解

通常情况下,频率方程(9)为复杂的超越方程,由于计算量大,本文选择 W-W 算法^[11]进行吊索频率计算。W-W 算法是在结构力学的背景下开发的,常用于分析结构自由振动、屈曲问题和波传导问题,其改进研究成为结构动刚度法的热点话题^[12]。

W-W 算法并不直接用于频率计算,而是通过计数得到结构小于试探频率的模式频率的个数,从而确定出任意阶次频率的上下界,最后再结合二分法或牛顿法求出任意精度的频率解。由于该方法可使动刚度矩阵保持 Sturm 序列特性,能保证方程求解过程中不遗漏根,其稳定性和正确性也在理论上已被证明,这是大多数解析法和近似解法所不具备的优点,推进了 DSM 理论的发展和工程应用。本文利用 W-W 算法,通过程序编写,可准确地求解吊索频率方程(9),从而得到该类吊索的各阶模式频率。主要步骤如下:

- (1)将原结构的边界条件进行简化改变,得到原结构对应的“中间结构”;
- (2)求“中间结构”的动刚度矩阵和频率方程,得到其各阶固有频率;
- (3)确定试探频率,以此得到“中间结构”固有频率小于确定试探频率的个数;
- (4)将“中间结构”的动刚度矩阵进行初等变换得到上三角动刚度矩阵,得到其主对角线上元素小于零的数目;
- (5)得到原结构固端频率小于试探频率的计数;
- (6)计算出原结构固有频率小于试探频率的计数;
- (7)初步给定结构第 i 阶固有频率的范围;
- (8)采用二分法对结构各阶模式频率进行求解,得到相应精度的结构频率值。

2 方法验证

2.1 参数退化分析

目前已有吊索边界为简支时索自由振动下索力和索频关系的数值解析表达式^[10],频率计算公式如下,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{EI}{H}\right)} \tag{10}$$

为验证本文吊索动力特性分析方法的准确性,将本文理论分析模型与上述理想模型进行同步简

化。当吊索边界条件为简支时,本文频率方程简化为:

$$\frac{EI}{l^3} = \begin{pmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{24} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_a l \\ \alpha_b l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

任意选取具有不同长度的 3 根吊索,其索参数如表 1 所列。

表 1 吊索参数表

编号	$EI/(Nm^2)$	$m/(kg \cdot m^{-1})$	l/m	H/N
1			6	2×10^5
2	1.185×10^5	16.6	9.26	2.37×10^5
3			12.487	5×10^5

利用本文方法求解简化模型的动力特性,得到的吊索频率值与精确的解析表达式计算值进行比较,可在一定程度上验证本文方法的准确性,计算吊索一阶模式频率结果如表 2 所列。

表 2 各吊索频率值

单位:Hz

编号	不考虑抗弯刚度			考虑抗弯刚度		
	解析解	本文解	相对误差 /%	解析解	本文解	相对误差 /%
1	9.15	9.15	0.00	9.18	9.20	0.26
2	6.45	6.45	0.00	6.46	6.48	0.30
3	6.95	6.95	0.00	6.95	7.00	0.68

从表 2 的计算结果和误差分析可以看出,在理论模型下,利用具体解析表达式计算得到的频率结果和通过本文方法计算的频率值十分接近。当不考虑吊索抗弯刚度时,理论解析计算值和本文计算值完全一致;当考虑吊索抗弯刚度时,本文计算值和理论解析值略有偏差,但其最大相对误差只有 0.68%。故通过利用本文理论与理论解析式计算参数退化后吊索的结果对比,不难得出利用本文方法分析计算吊索频率与具体解析求得的吊索频率基本无误差或者是误差可忽略,即利用本文方法计算吊索频率值是可行的,并且具有一定的准确性。

2.2 有限元分析

为进一步验证本文方法的准确性,结合文献[13]中考虑梁轴力的弹性边界梁的分析过程来进行本文的方法验证,采用该文献中由有限元得到的频率计算公式(9),计算吊索在本文边界条件下的频率值。同时,本文利用商业有限元软件 ABAQUS 在相应边界条件下建立吊索的梁单元模型来直接求解吊索的固有频率。取文献[13]中无量纲参数 $k=k^0l/EI$ 为 10,可得到对应的转动刚度,以某吊索为例,吊索参数为: $l=13.5\text{ m}, EI=4.9 \times 10^4\text{ N/m}^2, m=14.3\text{ kg/m}, H=$

$2.63 \times 10^5 \text{ N}$ 即可得到相应的转动刚度。

采用本文方法、文献[20]中弹性边界条件公式以及 ABAQUS 计算 $k=10$ 时的吊索前六阶频率, 其各阶频率值对比和相对误差均见图 4 所示, 其中相对误差 1 为本文计算值相对于文献计算值的误差绝对值, 相对误差 2 为本文计算值相对于有限元模型分析值的误差绝对值。

从图 2 的计算结果和误差分析可以看出, 利用已有文献和本文理论计算吊索任意边界条件下各阶频率值, 两者的最大相对误差不超过 1.3%。同样, 利用有限元软件建模进行分析得到的吊索频率值和本文计算的各频率值也相差不大, 误差分析表明文献计算的各阶频率和由本文方法计算得到的结果十分接近, 即在文献计算方法得到准确性验证的前提下, 运用本文方法可准确地计算各边界条件下吊索的各阶模态频率。同时, 利用有限元软件分析进一步得到本文方法的验证, 极大程度验证了本文理论分析和计算方法的准确性。随着模态阶数的增加, 相对误差并没有增大, 反而有减少的趋势, 并逐渐趋于稳定, 一定程度上说明了该方法计算吊索动力特性的稳定性。

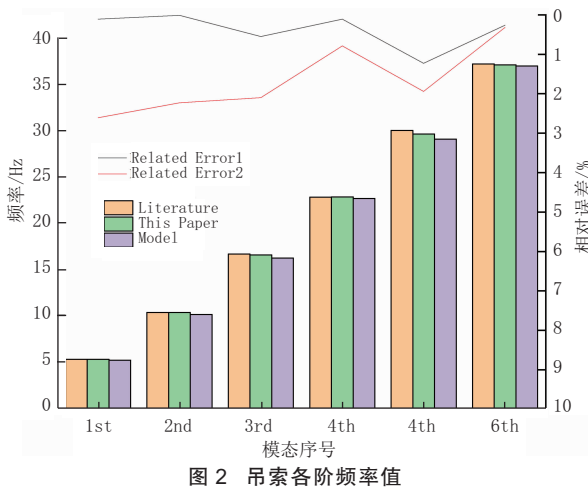


图 2 吊索各阶频率值

3 实桥应用

为将本文方法应用于实际桥梁中, 以本课题组已有监测项目宁波市明州大桥的吊索为例, 如图 3 所示。选取该桥上 D1b、D2a、D5a、D10b、D15a 和 D19b 6 根代表性吊索进行实测数据和本文计算数据的比较, 各参数如表 3 所列。吊索实测数据是通过在各吊索上布置加速度传感器获取, 吊索监测数据分析时长选取 2 min, 采样频率为 50 Hz, 得到各吊索的加速度信号。采用 FFT 对加速度信号进行变换得到实测吊索频率, 将各吊索的实测频谱列入图 4 所示。

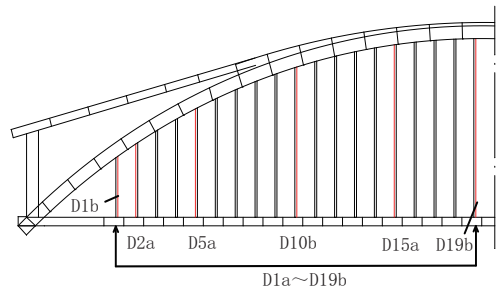


图 3 明州大桥半立面图

表 3 明州大桥各吊索参数

编号	$EI/(Nm^2)$	$m/(kg \cdot m^{-1})$	l/m	H/N
D1b	2.40×10^5	125	15.007	1.135×10^6
D2a	2.40×10^5	125	20.080	9.326×10^5
D5a	5.92×10^4	55	33.987	6.452×10^5
D10b	5.92×10^4	55	49.809	6.925×10^5
D15a	5.92×10^4	55	58.853	7.001×10^5
D19b	5.92×10^4	55	61.731	7.213×10^5

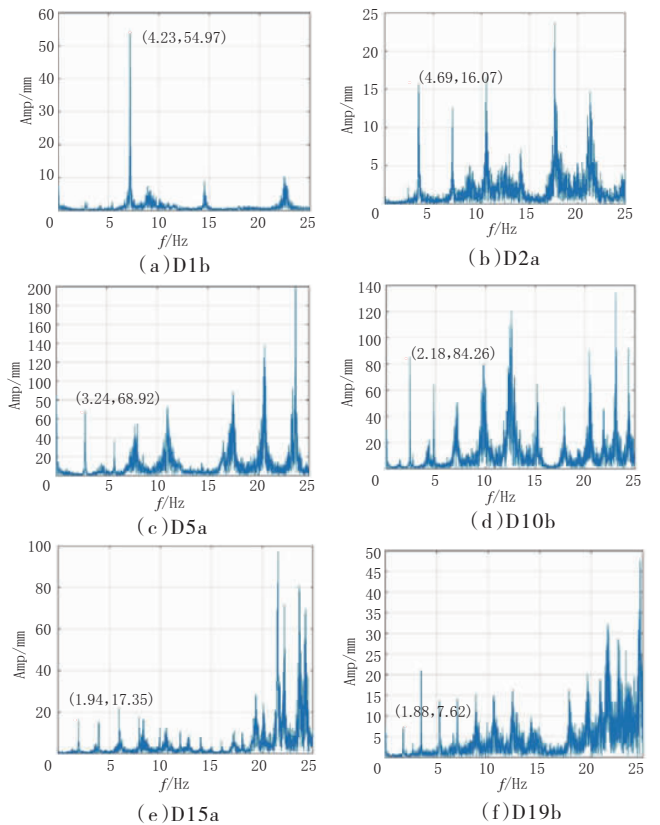


图 4 明州大桥各吊索频谱图

各吊索的误差分析结果如图 5 所示, 其中实测值为吊索的实测一阶固有频率, 计算值为以本文分析方法计算相应频率。

由图 5 容易得到, 利用本文方法计算的实桥吊索频率和实测频率的最大相对误差不超过 3%。误差产生的主要原因是吊索边界条件的判断, 但形成的

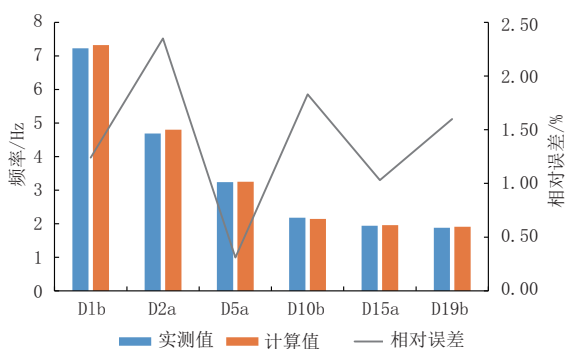


图5 各吊索频率分析

相对误差仍较小,可忽略不计。结果分析表明利用本文方法能准确地计算实桥吊索模态频率,可应用于实际桥梁吊索的计算。在实际桥梁工程中,依据本文的方法对实际桥梁吊索进行模态频率的计算,不仅可以节省大量的成本,还能为实桥运营期的监测提供较为准确的新思路。

4 结 语

实际工程中,吊索的不同参数对其动力特性的影响不同,本文发展了一套适用于实际不同参数下吊索体系的动力特性分析方法,并通过W-W算法进行精确的频率方程求解。本文通过简支吊索的精确解析解和各有限元方法的求解验证了本文方法的准确性,为进一步促进吊索动力特性研究提供了理论分析依据。最后,本文以明州大桥为例,准确的实现了实际桥梁吊索的求解,为实桥运营期的监测提供了新思路。

目前,针对吊索系统,尚无法以解析或半解析的形式全面地考虑抗弯刚度、边界条件等因素的具体影响,因此亟待更全面的分析各因素对吊索动力特性的综合影响。

参考文献:

[1] Fang, C.J., P. Tan, C.M. Chang, *et al*, A general solution for perfor-

mance evaluation of a tall building with multiple damped and undamped outriggers[J]. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2015, 24(12): 797-820.

- [2] Fei, H., Danhui, D., Wei, C. *et al*. A novel analysis method for damping characteristic of a type of double-beam systems with viscoelastic layer[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, (80): 911-928.
- [3] Triantafyllou, M. S., Grinfogel, L. Natural frequencies and modes of inclined cables[J]. Journal of Structural Engineering, 1986, 112(1): 139-148.
- [4] Caracoglia, L., Jones, N. P. In-plane dynamic behavior of cable networks. Part 2: prototype prediction and validation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279(3-5): 993-1014.
- [5] Ozdemir, H. A finite element approach for cable problems [J]. International Journal of Solids and Structures, 1979, 15(5): 427-437.
- [6] Tabatabai, H., Mehrabi, A. B. Vibration suppression measures for stay cables[C]//Proceeding of 17th International Modal Analysis Conference. Society for Experimental Mechanics, 1999(2): 1237-1243.
- [7] Dan, D. Research on the characteristics of transverse dynamic stiffness of an inclined shallow cable [J]. Journal of Vibration & Control, 2014, 22(3): 1609-1610.
- [8] 徐霞飞.考虑边界条件影响的吊索索力估算与试验[D].长沙:中南大学, 2008.
- [9] Irvine, H. M. Cable Structures (Structural Mechanics)[M]. MIT press, 1981.
- [10] Banerjee, J.R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach[J]. Computers & Structures, 1997, 63(1): 101-103.
- [11] Williams, F. W. W. H. Wittrick. An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1970, 12(9): 781-791.
- [12] Wittrick, W.H. F.W. Williams, A general algorithm for computer natural frequencies of elastic structures[J]. Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics, 1971, 24(3): 263-284.
- [13] Xing J Z, Wang Y G. Free vibrations of a beam with elastic end restraints subject to a constant axial load[J]. Archive of Applied Mechanics, 2013, 83(2): 241-252.

(上接第 238 页)

较小;基坑和深度为 30 m 时,基坑工程距离 56.87 m 以外对防汛墙安全影响较小。本文为黄浦江、苏州河沿线防汛墙安全运行管理和保护提供理论依据。

参考文献:

- [1] 肖敏.深浅基坑设计分析及[J].城市道桥与防洪, 2022(3): 256-259.
- [2] 牟晓伟.沟槽基坑上穿城市地道的影响分析[J].城市道桥与防洪, 2022(10): 121-123, 18.

- [3] 陈璟斌.不同深基坑开挖条件对邻近桩基受力性能影响研究[D].广州:广州大学, 2019.
- [4] 王烨晟,陈文华.基于地墙缺陷的深基坑渗透破坏评判准则研究[J].地下空间与工程学报, 2019, 15(增刊 2): 951-958.
- [5] 付红梅,张岩岩.深基坑空间效应研究综述[J].土工基础, 2019, 33(4): 465-470.
- [6] 杨新强,王汉超.深基坑开挖围护结构及邻近管线变形风险研究[J].施工技术, 2018, 47(19): 70-74.
- [7] 姜峰.基坑开挖引起邻近管线变形的理论解析[J].地下空间与工程学报, 2014, 10(2): 362-368.