

基于余能驻值原理的悬索切线刚度推导及分析

邱衍坚¹, 毛 玲¹, 吴亮泰², 李 涛²

(1. 南昌市政公用工程项目管理有限公司, 江西 南昌 330000; 2. 华东交通大学, 江西 南昌 330013)

摘 要: 索结构分析中, 索段静力平衡法和虚功增量方程法是两种主要的有限元理论分析基础, 但这两种方法在数学复杂性和通用性方面存在局限性。基于余能驻值原理和变分计算, 提出了一种新型的索结构有限元分析理论。与传统方法相比, 该方法避免了复杂的数学推导, 并具有更好的杆系结构通用性。算例分析表明, 该方法在计算精度和收敛效率方面与现有方法相近, 有较好的准确性和可靠性, 可为索结构以及其他杆系结构的非线性有限元分析提供一种更为简洁有效的新思路。

关键词: 索结构; 余能驻值原理; 变分计算; 非线性分析

中图分类号: TU331; U441

文献标志码: A

文章编号: 1009-7716(2025)11-0100-04

Derivation and Analysis of Tangent Stiffness for Suspended Cable Based on Principle of Complementary Energy

QIU Yanjian¹, MAO Ling¹, WU Liangqin², LI Tao²

(1. Nanchang Municipal Public Works Project Management Co., Ltd., Nanchang 330000, China; 2. East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In the analysis of cable structures, the static equilibrium method of cable segments and the virtual work increment equation method are currently the main theoretical foundations of finite element analysis. However, the two methods have limitations in terms of mathematical complexity and universality. Based on the principle of complementary energy and variational calculation, a new finite element analysis method for cable structures is proposed. Compared with the traditional methods, the proposed method avoids the complex mathematical derivations and has better generality for the structures of bar system. The analysis of examples show that this method is comparable to the existing methods in terms of computational accuracy and convergence efficiency with good accuracy and reliability, providing a concise and effective analysis method for the nonlinear finite element analysis of cable structures and other structures of bar system.

Keywords: cable structures; principle of complementary energy; variational calculation; nonlinear analysis

0 引 言

索作为一种柔性高强构件已广泛应用于缆索承重桥梁、预应力钢桁架、高压输电结构、穹顶和索道等结构体系^[1-2]。由于这类结构具有刚度小、柔性强等特点, 其在外荷载作用下的响应通常涉及大变形, 导致传统线性分析方法难以准确预测其受力与变形状态。因此, 非线性分析是研究索结构受力变形的重要手段。目前对索结构的非线性分析主要有解析

法^[3-4]和有限元法^[5-6]两种思路。解析法基于力学分析, 将控制方程建立在结构变形后的位置上^[7], 概念清晰, 便于开展受力机制分析, 但该方法难以处理因结构显著变形引起的荷载位置变化问题^[8], 也无法分析结构复杂的缆索系统^[9-11], 而有限元方法则有较强的复杂场景适用性, 因此在工程索结构分析中得到广泛应用^[12-13], 成为当前索结构非线性分析的主流方法^[14-16]。

有限元法分析索结构的关键是要正确建立索单元的切线刚度矩阵^[17]。目前获取其切线刚度的方法主要有索段静力平衡法和虚功增量方程法。索段静力平衡法从力学分析出发, 建立索端位移与力增量的系数矩阵显式表达^[18]。然而, 该方法在推导过程中涉及大量复杂的公式^[19-20], 数学复杂性较高, 且缺乏对其他类型杆件的推广性^[21]。虚功增量方程法结

收稿日期: 2024-12-13

基金项目: 国家自然科学基金(52468023); 江西省自然科学基金项目(20224BAB204064)

作者简介: 邱衍坚(1989—), 男, 硕士, 高级工程师, 主要从事结构理论分析及施工控制工作。

通信作者: 吴亮泰(1985—), 博士, 副教授, 主要从事车桥耦合振动及控制研究工作。电子信箱: jetwu1985@163.com

合非线性位移-应变关系,构建增量平衡方程,理论上具有更好的通用性^[22]。但其分析过程较为复杂,不利于工程实践中的普及应用。

为克服现有方法的局限性,本文提出了一种新型的索结构有限元分析理论。该理论结合变分计算与余能驻值原理,直接得到索单元的切线刚度矩阵和不平衡节点力向量,并结合全量法增量方程的迭代算法,实现索结构的非线性分析。为验证本文方法的有效性,分别对小垂度单索结构与具有集中荷载的大垂度索结构进行了非线性分析。将算例结果与商业软件 SAP2000 和文献结果进行对比,验证了本文方法在计算精度和收敛效率方面的可靠性和准确性。与传统方法相比,本文提出的分析理论避免了复杂公式的繁琐推导,降低了分析门槛,提高了理论的普适性,同时保持了与经典方法相当的计算性能,展示了较高的工程实用价值。

1 索结构内力与位移关联性分析

为便于对索结构进行力学分析,本文采用以下假定^[23]:(1)索段仅能够承受拉力;(2)材料始终处于弹性工作范围;(3)所有物理量连续可导。索结构受外荷载变形时,通常以变形前的静平衡状态为初始态,其线形函数可由经典的悬链线方程准确描述^[24-25]。为方便计算,设一索段的初始线形函数为 $y_0(x)$,水平力为 H_0 ,如图 1(a)所示。设其在静平衡状态索段长度为 ds_0 ,其左端(i 节点)坐标为 (x, y) ,右端(j 节点)坐标可表示为 $(x + dx, y_0 + y'_0 dx)$,则 ds_0 可表示为:

$$ds_0 = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y_0'^2} dx = y_s dx \quad (1)$$

式中: y_s 为函数 $y_s(x) = \sqrt{1 + y_0'^2(x)}$ 的简写。

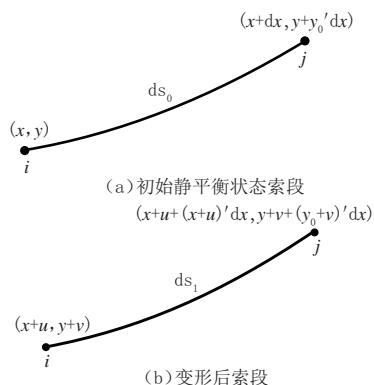


图 1 索段变形理论模型

设 ds_1 为该索段受荷载变形后的长度, u 和 v 分别表示该索段在荷载下的水平和竖向位移。在新的静

平衡状态下,索段左端的坐标为 $(x + u, y + v)$,右端的坐标为 $[x + u + (x + u)'dx, y + v + (y'_0 + v')'dx]$,如图 1(b)所示,其中 $(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ 。此时该索段的长度 ds_1 可表示为:

$$ds_1 = \sqrt{(1 + u')^2 + (y'_0 + v')^2} dx \quad (2)$$

联立式(1)、式(2),并忽略应变中的高阶微量,可得 ds_1 相较于 ds_0 的应变增加量 ε 为:

$$\varepsilon = \frac{1}{y_s^2} \left[u' + y'_0 v' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \right] \quad (3)$$

对应的拉力增量 T_1 应为:

$$T_1 = EA\varepsilon \quad (4)$$

式(3)、式(4)建立了索段位移到拉力的关系式,由索段纵向与竖向位移 u, v ,即可唯一地确定拉力增量 T_1 。

2 索单元的非线性平衡方程

广义的余能驻值原理描述了系统能量增量的变分关系,可表述为“外力做功增量的变分等于系统应变能增量的变分”,表达式为:

$$\delta(\Delta W) = \delta(\Delta V) \quad (5)$$

式中: $\delta(\cdot)$ 表示变分计算; $\Delta(\cdot)$ 表示作用对象的微增量; W 为索段外荷载做功; V 为索段应变能。

变形后索段的应变能 V 为:

$$V = \int_0^{L_s} [(T_0 + T_1)\varepsilon] ds \quad (6)$$

式中: L_s 为索长; T_0 为初始拉力; T_1 与 ε 含义同式(3)、式(4)。应变能 V 的增量可表达为:

$$\Delta V = \int_0^L \left\{ \frac{T_0 + T_1}{y_s} \left[(1 + u') \Delta u' + (y'_0 + v') \Delta v' \right] \right\} dx \quad (7)$$

对上式作变分计算可得:

$$\delta(\Delta V) = \int_0^L \left\{ \frac{\delta u'}{\delta v'} \right\}^T \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u' \\ \Delta v' \end{Bmatrix} dx + \int_0^L \left\{ \frac{\delta(\Delta u')}{\delta(\Delta v')} \right\} \frac{T_0 + T_1}{y_s} \begin{Bmatrix} 1 + u' \\ y'_0 + v' \end{Bmatrix} dx \quad (8)$$

其中:

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{T_0 + T_1}{y_s} + \frac{EA}{y_s^3} (1 + u')^2 \\ k_{12} = k_{21} = \frac{EA}{y_s^3} (1 + u')(y'_0 + v') \\ k_{22} = \frac{T_0 + T_1}{y_s} + \frac{EA}{y_s^3} (y'_0 + v')^2 \end{cases} \quad (9)$$

设两节点索单元的插值形式为^[26]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}(x) \mathbf{d}_{ei} = \left[\left(\frac{x_j - x}{L} \right) \mathbf{I}_2 \left(\frac{x - x_i}{L} \right) \mathbf{I}_2 \right] \mathbf{d}_{ei} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{N}(x)$ 为位移插值函数向量; $\mathbf{d}_{ei} = [u_i v_i u_j v_j]$ 为第 i 个单元总的节点位移向量; x_i, x_j 分别为索单元端点在局部坐标系下的横坐标; $\mathbf{I}_2$ 为二阶单位矩阵; L 为索单元弦长。将上式代入方程(8)的第一项积分可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ \begin{matrix} \delta u' \\ \delta v' \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta u' \\ \Delta v' \end{matrix} \right\} dx \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \delta \mathbf{d} \left[-\mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 \right]^T \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left[-\mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 \right] \Delta \mathbf{d} dx \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \delta \mathbf{d} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}} & -\tilde{\mathbf{k}} \\ -\tilde{\mathbf{k}} & \tilde{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d} dx \quad (11) \end{aligned}$$

式中: $\tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$, 令 $\mathbf{K}^e = \frac{1}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}} & -\tilde{\mathbf{k}} \\ -\tilde{\mathbf{k}} & \tilde{\mathbf{k}} \end{bmatrix} dx$, 并对外力做功增量做变分计算得:

$$\delta(\Delta W) = \int_0^L \delta \mathbf{d} \Delta \mathbf{f}^e dx \quad (12)$$

式中: $\mathbf{f}^e$ 为索单元在水平向和竖向的外荷载向量。由余能驻值原理式(5)可知式(8)、式(12)相等。将式(8)第二项积分移至等式右端, 并令积分式内 $\delta \mathbf{d}$ 系数相等可得:

$$\mathbf{K}^e \Delta \mathbf{d} = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{f}^e - \mathbf{N}^{tr} \frac{T_0 + T_1}{y_s} (1 + u') \\ -\mathbf{N}^{tr} \frac{T_0 + T_1}{y_s} (y'_0 + v') \end{matrix} \right\} dx \quad (13)$$

上式表明了位移增量 $\Delta \mathbf{d}$ 与外荷载增量 $\Delta \mathbf{f}^e$ 的代数关系式, 故 $\mathbf{K}^e$ 为索单元切线刚度矩阵, 右端项为单元节点等效荷载向量。对包含多个索单元结构的整体切线刚度矩阵进行组装, 可得索结构的非线性静平衡方程为:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{K}_T$ 为索结构的总体切线刚度矩阵; $\mathbf{F}$ 为结构等效节点荷载向量。

3 求解算法

对于给定的非线性方程组 $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (其中 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 依赖于位移 $\mathbf{x}$), 经典的牛顿迭代法^[27-28]给出的迭代算法为 $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{b}$ 。其中 $\mathbf{x}^i$ 表示第 i 次的迭代结果, $\mathbf{J}^{-1}$ 为第 i 次迭代时矩阵 $\mathbf{A}$ 的雅可比矩阵。对于索结构非线性方程式而言, 其原始的表达式为:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为结构刚度矩阵, 而式(14)中的切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_T$ 是在位移增量条件下建立的荷载与位移的比例

系数(矩阵), 其实质上为刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 的雅可比矩阵。在此条件下, 可依据经典的牛顿迭代法, 利用下式迭代求解式(14)和式(15)的节点位移向量 $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}^i + \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F} \quad (16)$$

4 算例分析

例1: 如图2所示一小垂度单索结构, 已知其初始水平张力为 $H_0 = 10$ kN, 初始均布荷载为 $\gamma_0 = 0.2$ kN/m, 弹性模量为 $E = 170$ kN/mm², 截面积为 $A = 67.4$ mm²。计算其在终态荷载 $\gamma_1 = 0.5$ kN/m 作用下的平衡几何状态与内力^[29]。

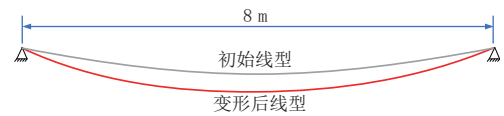


图2 例1计算模型

本例采用20个索单元进行分析(对应结构矩阵维度为 42×42), 依照第3节算法, 计算程序在经历15次迭代后收敛。此外, 本文基于商业有限元软件SAP2000计算了本例(采用20个悬索单元, 对应结构矩阵维度为 63×63), 计算结果与文献[29](采用2个悬索单元, 对应结构矩阵维度为 9×9)对比见表1。由表1可知, 本文方法计算的位移与水平拉力有较高精度(与对照结果高度吻合), 且计算效率显著高于SAP2000。

表1 例1计算结果对比

项目	SAP2000 用时 2.9 s	本文用时 1.5 s	文献[29]
中点垂度/m	-0.210 9	-0.210 9	-0.211
水平拉力/kN	18.960	18.951	18.961

例2: 如图3所示一单索结构, 灰色实线为自重作用下线形, 红色虚线为集中荷载作用下变形后线形, 索结构无量纲参数为: 弹性模量 $E = 19 \times 10^6$, 截面积 $A = 0.85$, 在自重荷载 $q = 3.16$ 作用下处于初始平衡态, 计算其在一集 $P = 8\ 000$ 作用下的节点位移。

本例采用40个索单元进行分析(对应结构矩阵维度为 82×82), 依照第3节算法, 计算程序在经历20次迭代后收敛。本文计算结果、SAP2000(采用40个悬索单元, 对应结构矩阵维度为 123×123)和文献[30]结果(采用2个悬索单元, 对应结构矩阵维度为 9×9)对比见表2。由表2可知, 不同方法的计算结果高度一致, 证明了本文方法的正确性。

5 结 语

本文基于广义余能驻值原理和变分计算, 提出

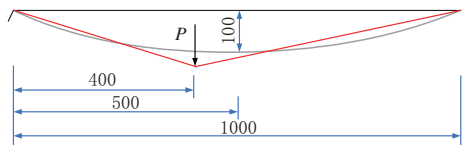


图 3 例 2 计算模型

表 2 例 2 计算结果对比

荷载 P 处位移	SAP2000 用时 3.4 s	本文用时 1.8 s	文献[30]
竖向	-18.457	-18.457	-18.458
纵向	-2.819	-2.821	-2.819

了一种新型的索结构非线性有限元分析方法,并通过理论推导与算例验证,系统评估了该方法的正确性与适用性。研究表明,该方法在以下方面具有两个显著优势:

(1)在简洁性与通用性方面,本文方法避免了索段静力平衡方程中复杂数学公式的依赖,显著简化了推导过程,基于余能驻值原理的理论框架,可便捷地推广至其他杆系结构。

(2)在准确性与可靠性方面,大变形条件下,本文方法的计算结果与经典方法高度吻合,充分证明了该方法在非线性分析中的适用性。

以上优势使得本方法不仅为索结构的非线性分析提供了一种简洁高效的新思路,还为其柔性结构的工程实践分析奠定了理论基础。

参考文献:

[1] 蔡建国,杨晶文,汪凯,等.考虑摩擦滑移拉索的张拉过程研究[J]. 土木工程学报,2013,46(11):54-62.

[2] 张卫东,秦剑,陈迪,等.工作索耦合作用下多档多载荷货运索道的分析与计算方法[J]. 工程设计学报,2020,27(3):293-300.

[3] 唐茂林,强士中,沈锐利.悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J]. 铁道学报,2003(1):87-91.

[4] 周绪红,武隼,狄谨.大跨径自锚式悬索桥受力分析[J]. 土木工程学报,2006(2):42-45;65.

[5] DE BORST R, CRISFIELD M A, REMMERS J J, et al. Nonlinear finite element analysis of solids and structures[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2012.

[6] 陈政清,曾庆元,颜全胜.空间杆系结构大挠度问题内力分析的UL列式法[J]. 土木工程学报,1992(5):34-44.

[7] 邓亨长,胡洪俊.基于分段悬链线和索力连续算法的缆索吊装系统准确计算[J]. 公路,2018,63(11):161-164.

[8] 徐金帅,齐朝晖,卓英鹏,等.一种空间悬索的几何非线性计算方

法[J]. 机械工程学报,2022,58(9):147-156.

[9] 张兴标,沈锐利,彭丹.悬索桥平面缆索结构纵向刚度的解析算法及影响参数研究[J]. 铁道科学与工程学报,2015,12(3):609-615.

[10] 赵海霞,王涛.集中力活载作用下悬索桥变形及内力的解析算法[J]. 中外公路,2024,44(3):104-114.

[11] 朱伟华,刘国坤,颜东煌,等.基于刚性支承连续梁法的悬索桥成桥状态解析算法[J]. 长安大学学报(自然科学版),2024,44(1):58-67.

[12] 康厚军,尹昆,苏潇阳,等.基于索-梁结构的斜拉桥非线性振动仿真研究[J]. 动力学与控制学报,2024,22(5):16-23.

[13] 尚仁杰,蒋方新,孙悦,等.考虑几何非线性的柔性光伏支架变形与刚度分析[J]. 力学与实践,2023,45(2):395-400.

[14] 李正良,王邦杰,王涛.考虑山地风场效应的耐张型悬索支撑输电结构风振响应分析[J]. 工程力学,2025,42(6):93-104.

[15] 杨政,贺拥军,全勇.单层悬索光伏支架静力分析及简化计算方法[J]. 科学技术与工程,2022,22(21):9252-9259.

[16] 王国威,张鹏,卢文胜.支座激励下小垂度悬索动力响应试验及数值模拟[J]. 工程科学与技术,2022,54(6):166-175.

[17] 晏致涛,刘操兰,李正良.空间悬链线索单元的非线性有限元分析[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2010,33(10):64-69.

[18] 陈诗再,杨孟刚.滑移索结构分析的精确三维有限元法[J]. 工程力学,2023,40(2):135-144.

[19] 赵海霞,张文明,蒋晓放,等.基于悬链线的斜拉索垂度效应等效弹性模量计算方法[J]. 中外公路,2020,40(2):62-66.

[20] 郭小刚,王刚,宋晓东,等.悬链线竖向集中力作用下的构形分析和张力计算[J]. 计算力学学报,2020,37(4):431-438.

[21] 刘玥君,汤爱平,刘克同.索网结构中的空间两节点悬链线索单元[J]. 哈尔滨工程大学学报,2016,37(6):788-795.

[22] 陈政清.梁杆结构几何非线性有限元的数值实现方法[J]. 工程力学,2014(6):42-52.

[23] 赵碧航,杨汝东,孙测世.不同加劲梁重量下的悬索非线性振动特性[J]. 科学技术与工程,2022,22(21):9346-9354.

[24] AN X, GOSLING P D, ZHOU X. Analytical structural reliability analysis of a suspended cable[J]. Structural Safety, 2016(58):20-30.

[25] 单德山,张潇,顾晓宇,等.斜拉索悬链线构形的伸长量解析计算方法[J]. 吉林大学学报(工学版),2021,51(1):217-224.

[26] 崔孟雷,李春光,庄心善.全局坐标系下有限元形函数的直接构造方法[J]. 数值计算与计算机应用,2018,39(1):28-36.

[27] ATKINSON K E. An introduction to numerical analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2008.

[28] 李义强,袁占斌,张念.关于牛顿迭代法中导数离散格式的探讨[J]. 高等数学研究,2024,27(4):14-16.

[29] 杨孟刚,陈政清.基于UL列式的两节点悬链线索元非线性有限元分析[J]. 土木工程学报,2003(8):63-68.

[30] JAYARAMAN H, KNUDSON W. A curved element for the analysis of cable structures[J]. Computers & Structures, 1981, 14(3-4):325-333.