

基于Python程序的钢筋混凝土截面承载力计算方法

黄庭森

(中铁第五勘察设计院集团有限公司,北京市 102600)

摘要: 钢筋混凝土构件在多向受力状态下,难以确定其应变中和轴位置。为此,基于平截面计算假定,使用Python自适应稀疏三角形网格划分技术,并结合格林公式进行公式推导,求解了某应变中和轴下的截面内力,解决了任意截面网格划分及内力求解难题;同时针对容许应力法(材料线性本构)、极限状态法(材料非线性本构)分别建立求解目标函数,并以Python数值优化库(scipy.optimize)求解,解决了钢筋混凝土构件任意截面的承载力求解难题,且所编制的Python计算程序已通过大量算例验证和工程实例应用,目前已应用于多座铁路桥梁和公路桥梁工程设计中。

关键词: 容许应力法;极限状态法;任意截面;钢筋混凝土;承载力计算;Python

中图分类号: U441+.2

文献标志码: A

文章编号: 1009-7716(2025)09-0424-04

Calculation Method for Bearing Capacity of Reinforced Concrete Section Based on Python Program

HUANG Tingsen

(China Railway Fifth Survey and Design Institute Group Co., Ltd., Beijing 102600, China)

Abstract: It is hard to determine the position of the strain neutral axis of reinforced concrete member under multi-axial loading. Therefore, based on the assumption of flat section calculation, the Python adaptive sparse triangular meshing technology is used. And the internal forces of the cross-section under a certain strain neutral axis are solved by combining Green formula for formula derivation, and the problems of mesh division at any cross-section and internal force solution are solved. At the same time, the solution objective functions are established respectively for the allowable stress method (linear constitutive of materials) and the limit state method (nonlinear constitutive of materials). The problem of solving the bearing capacity of any section of reinforced concrete components are solved by the Python numerical optimization library (scipy.optimize). Moreover, the Python computing program compiled has been verified through a large number of calculation examples and applied in engineering cases, and has been applied to the engineering design of many railway bridges and highway bridges at present.

Keywords: allowable stress method; limit state method; arbitrary cross section; reinforced concrete; calculation of bearing capacity; Python

0 引言

桥梁工程中塔、墩、台等结构通常采用钢筋混凝土构件,其受力模式主要为受弯、偏心受压。针对钢筋混凝土构件的截面承载力问题,现行《铁路桥涵混凝土结构设计规范》(TB 10092—2017)和《公路钢筋混凝土及预应力桥涵设计规范》(JTG 3362—2018)仅给出了矩形、工字形、圆形截面的单向受弯和偏压的截面承载力公式。但实际情况下,桥墩、桥

塔构件通常表现为双向受弯、双向偏压受力模式,并且非对称截面在桥塔中的应用也较为常见。

求解此类构件截面承载力的关键在于确定平衡状态下的截面应变中和轴位置。双向受力构件的截面应变中和轴位置并不明确,其与截面形状、钢筋布置、荷载形式等因素均有关系,因此确定过程相当复杂。针对此问题,国内学者余琪等^[1-3]基于容许应力法,采用迭代计算来求解混凝土和钢筋应力;李波等^[4-6]基于极限状态法,采用二分法迭代计算来求解中和轴位置,但其仅适用于双折线理想弹塑性混凝土本构关系;阴文蔚^[7]对截面密分网格,采用Python求解库来优化求解组合截面承载力,但因网格数量过多而降低了求解效率。

收稿日期: 2025-02-13

基金项目: 中铁第五勘察设计院集团有限公司科研项目,超宽幅中央索面斜拉桥建造技术(T5Y2022-B02)

作者简介: 黄庭森(1994—),男,硕士,工程师,从事桥梁设计工作。

本文基于 Python 网格划分和非线性方程组求解技术,针对容许应力法、极限状态法建立不同的非线性平衡方程组,并以此求解截面应变中和轴位置,从而解决了2种求解方法下任意钢筋混凝土截面双向受力的承载力计算问题。

1 计算方法

1.1 基本假定

本文截面承载力计算基于以下假定:

- (1)计算截面满足平截面假定,即截面上任一点处的应变都与其到中性轴的距离成正比。
- (2)不考虑受拉混凝土参与工作。

1.2 材料本构

基于容许应力法、极限状态法的混凝土和钢筋本构关系见图1至图4。图中各参数含义如下:

f_c 、 f_y 分别为混凝土、钢筋屈服强度; σ_c 、 σ_s 分别为混凝土、钢筋容许应力; E_c 、 E_s 分别为混凝土、钢筋弹性模量; ε_c 、 ε_s 分别为混凝土、钢筋应变; σ_{c0} 、 f_s 分别为混凝土、钢筋屈服应力; ε_{c0} 、 ε_y 分别为混凝土、钢筋屈服应变; ε_{cu} 、 ε_{su} 分别为混凝土、钢筋极限应变。

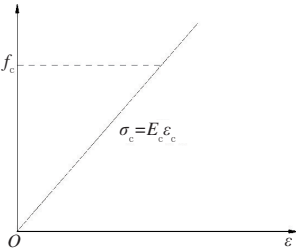


图1 容许应力法混凝土本构

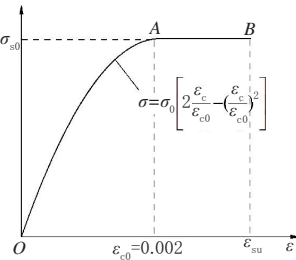


图2 极限状态法混凝土本构

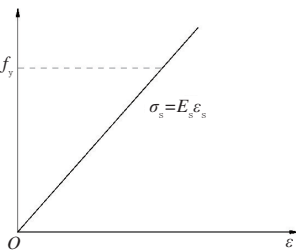


图3 容许应力法钢筋本构

容许应力法理论下,计算得出的混凝土和钢筋应力超过规范容许应力即认为截面破坏。

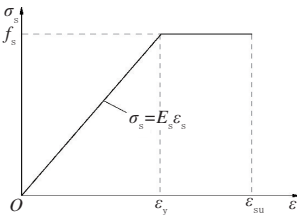


图4 极限状态法钢筋本构

极限状态法理论下,当截面某点混凝土压应变超过极限压应变(0.003 3)或钢筋应变超过极限应变(0.01)时,此平衡状态下积分求得的截面内力即为截面极限承载力。

1.3 截面网格划分

利用 Python 的 sectionpropertie.pre.geometry 功能库^[8-11]生成几何截面。使用 create_mesh 函数,根据中和轴和截面轮廓点对截面受压区进行若干个稀疏三角形网格划分(按最大网格面积划分原则),并读取三角形网格顶点坐标。截面网格划分示意图见图5。

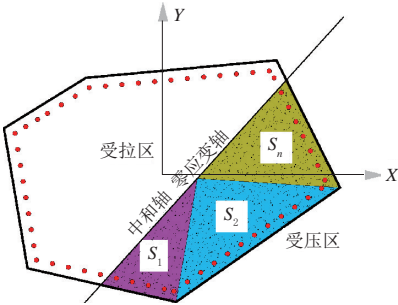


图5 截面网格划分示意图

2 容许应力法公式推导

2.1 求解方程组建立

以截面换算形心为原点,建立平面直角坐标系,假定截面应变平面方程为:

$$\varepsilon = ax + by + c \tag{1}$$

容许应力法求解方程组如下:

$$\begin{cases} N_c + N_s - N = 0 \\ M_{xc} + M_{xs} - M_x = 0 \\ M_{yc} + M_{ys} - M_y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

式中: N_c 、 M_{xc} 、 M_{yc} 分别为受压混凝土产生的轴力、绕 x 轴弯矩、绕 y 轴弯矩; N_s 、 M_{xs} 、 M_{ys} 分别为钢筋产生的轴力、绕 x 轴弯矩、绕 y 轴弯矩; N 、 M_x 、 M_y 分别为外荷载产生的轴力、绕 x 轴弯矩、绕 y 轴弯矩。

2.2 受压混凝土内力积分

求解公式(2)的关键在于求解受压区混凝土产生的内力 N_c 、 M_{xc} 、 M_{yc} 。

受压区混凝土内力公式如下:

$$\begin{cases} N_c = \iint_D \sigma_c dx dy = \iint_D E_c \varepsilon_c dx dy \\ M_{cx} = \iint_D \sigma_c \cdot y dx dy = \iint_D E_c \varepsilon_c \cdot y dx dy \\ M_{cy} = \iint_D \sigma_c \cdot x dx dy = \iint_D E_c \varepsilon_c \cdot x dx dy \end{cases} \quad (3)$$

将应变方程 $\varepsilon_c = ax + by + c$ 代入公式(3),并将受压区域 D 分解为若干三角形区域 $S_1 \sim S_n$,则式(3)可写成式(4)的形式:

$$\begin{cases} N_c = E_c \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} (ax + by + c) dx dy \\ M_{cx} = E_c \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} (ax + by + c) \cdot y dx dy \\ M_{cy} = E_c \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} (ax + by + c) \cdot x dx dy \end{cases} \quad (4)$$

根据格林公式^[12],可将曲面积分转换为沿面轮廓的曲线积分。单个三角形网格的各边长分别为 l_1, l_2, l_3 ,各边与 x 轴所成夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$,利用参数方程和格林公式,可求得单个三角形网格的混凝土内力,见式(5):

$$\begin{aligned} N_{cj} &= E_c \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left[\frac{1}{2} ax^2 \sin \theta_i - \frac{1}{2} by^2 + cx \sin \theta_i \right] dt \\ M_{cxj} &= E_c \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left[\frac{1}{2} ax^2 y \sin \theta_i + by^2 x \sin \theta_i - \frac{1}{2} cy^2 \cos \theta_i \right] dt \\ M_{cyj} &= E_c \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left[\frac{1}{3} ax^3 \sin \theta_i + \frac{1}{2} byx^2 \sin \theta_i + \frac{1}{2} cx^2 \sin \theta_i \right] dt \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $x = x_i + \cos \theta_i t$, $y = y_i + \sin \theta_i t$ 。将其代入式(5)求定积分,可得第 j 个三角形混凝土受压区内力,则 $S_1 \sim S_n$ 所有受压区混凝土内力为:

$$N_c = \sum_{j=1}^n N_{cj}; M_{cx} = \sum_{j=1}^n M_{cxj}; M_{cy} = \sum_{j=1}^n M_{cyj} \quad (6)$$

2.3 钢筋内力积分

第 i 点钢筋坐标为 x_{gi}, y_{gi} ,钢筋面积为 A_{gi} ,钢筋应变为 $\varepsilon_s = ax_{gi} + by_{gi} + c$,则 n 根钢筋总内力可按式(7)求得:

$$\begin{cases} N_s = E_s \sum_{i=1}^n (ax_{gi} + by_{gi} + c) A_{gi} \\ M_{sx} = E_s \sum_{i=1}^n (ax_{gi} + by_{gi} + c) A_{gi} y_{gi} \\ M_{sy} = E_s \sum_{i=1}^n (ax_{gi} + by_{gi} + c) A_{gi} x_{gi} \end{cases} \quad (7)$$

将式(6)、式(7)代入式(2),即可建立以中和轴 a, b, c 为变量的三元一次线性方程组。

3 极限状态法公式推导

将截面所受的 M_x, M_y 弯矩合成为 M_b ,以合成弯矩 M_b 主轴方向建立 x 轴,垂直主轴方向建立 y 轴。当截面混凝土最大压应变达到极限压应变(0.003 3)或钢筋应变达到极限应变(0.01)时,由此时的截面平衡状态求得的主轴弯矩即为截面承载力。基于轴力平衡、次轴弯矩为零、混凝土或钢筋达到极限应变所建立的求解方程为:

$$\begin{cases} N_c + N_s - N = 0 \\ M_{yc} + M_{ys} = 0 \\ \max[(\varepsilon_{c \max} - \varepsilon_{cu}), (\varepsilon_{s \max} - \varepsilon_{su})] = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中: $\varepsilon_{c \max}$ 为截面各轮廓点最大压应变; $\varepsilon_{s \max}$ 为钢筋最大应变; $\varepsilon_{cu}, \varepsilon_{su}$ 分别为混凝土极限压应变和钢筋极限应变。

与2.2节相同,以中和轴 a, b, c 为变量,采用非线性混凝土应力应变关系,结合格林公式和参数方程,可求得受压区混凝土内力 N_c 和 M_{yc} 。与2.3节相同,可求得钢筋内力 N_s 和 M_{ys} 。基于应变平面方程 $\varepsilon = ax + by + c$,遍历受压区混凝土截面轮廓点和钢筋点,可得混凝土最大压应变 $\varepsilon_{c \max}$ 和钢筋最大应变 $\varepsilon_{s \max}$ 。

4 方程求解

利用Python中的 `scipy.optimize` (数值优化库)中的 `root` 模块求解非线性方程组。`scipy.optimize.root` 的主要参数包括目标函数、初始猜测值、求解方法。

本文以 $f = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0$ 作为目标函数,采用“hybr”作为求解方法,求解中和轴变量 a, b, c 。其中, f_1, f_2, f_3 分别为公式(2)或公式(8)平衡方程组左项。

解出应变中和轴方程后,采用以下方法求解截面应力或截面承载力:

(1)容许应力法,根据材料本构关系即可求得截面任意一点应力。

(2)极限状态法,将材料极限应变下的应变中和轴参数代入2.2节式(3)至式(5)、2.3节式(7),即可求出极限状态下截面主轴弯矩(即截面承载力)。

程序流程框图见图6。

5 结果验证

为验证本文计算方法的正确性,同时采用商业

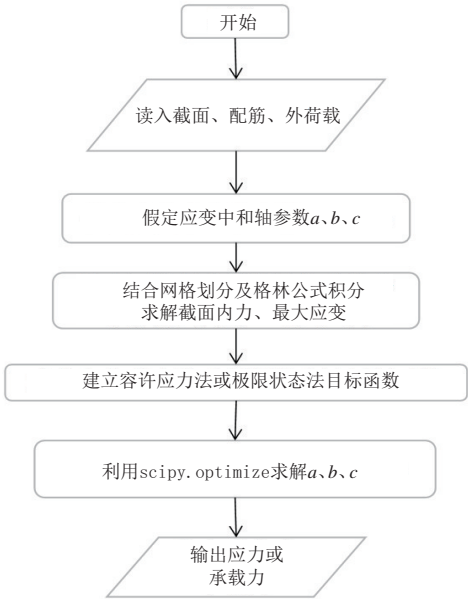


图 6 程序流程框图

软件桥梁博士 5.0 进行了容许应力法、极限状态法的计算。

以箱型截面为例,混凝土标号 C50,钢筋型号 HRB400。截面宽 2.0 m,高 3.0 m,上下壁厚 0.4 m,左右壁厚 0.3 m,箱室内倒角为 0.2 m×0.2 m。截面上下缘布置双根 1 束直径 25 mm 钢筋,侧面布置单根 1 束直径 25 mm 钢筋,钢筋重心高度均为 50 mm,钢筋间距均为 100 mm。

计算截面示意图见图 7。

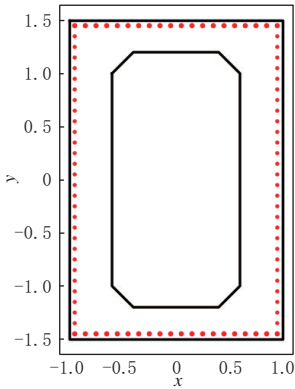


图 7 计算截面示意图

5.1 容许应力法验证

截面外荷载:轴压力 $N=5\,000\text{ kN}$, 主轴弯矩 $M_x=15\,000\text{ kN}\cdot\text{m}$, 次轴弯矩 $M_y=5\,000\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。容许应力法截面应力计算结果见表 1。

表 1 容许应力法计算结果对比			
单位:MPa			
项目	桥梁博士 5.0	本文计算方法	差异/%
混凝土最大压应力	14.13	14.13	0
钢筋最大拉应力	173.80	173.81	0

5.2 极限状态法验证

截面外荷载:轴压力 $N=10\,000\text{ kN}$, 主轴弯矩 $M_x=$

$5\,000\text{ kN}\cdot\text{m}$, 次轴弯矩 $M_y=2\,000\text{ kN}\cdot\text{m}$;按《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(JTG 3362—2018),取混凝土强度设计值 22.4 MPa,钢筋强度设计值 330 MPa。极限状态法截面承载力计算结果见表 2。

表 2 极限状态法计算结果对比			
单位:kN·m			
项目	桥梁博士 5.0	本文计算方法	差异/%
主轴弯矩承载力	29 195.7	29 097.3	-0.33
次轴弯矩承载力	11 686.9	11 638.9	-0.41

6 结 语

(1)基于 Python 框架 sectionpropertie 库,可对任意截面进行三角形网格(稀疏)划分,解决任意截面的网格划分问题。

(2)针对线性本构(容许应力法)或非线性本构(极限状态法),结合划分的三角形网格坐标及格林公式,可积分计算出截面内力。提高了计算速度和精度。

(3)分别建立容许应力法、极限状态法下的目标函数,使用 Python 中的 scipy.optimize 库求解应变中和轴参数,其计算速度快,求解精度高,解决了非线性方程组的求解难题。

(4)依托本文计算方法编制的 Python 程序,经大量算例验证,证明了本文方法及程序计算的可靠性,目前已应用于多座铁路、公路桥梁工程设计中。

参考文献:

[1] 余琪.矩形截面双向大偏心受压配筋计算的直接迭代法[J].铁道建筑,1993(9):1-5.
[2] 童森林.圆端形截面配筋计算[J].铁道工程学报,1994(1):69-82.
[3] 朱勇战.任意截面钢筋混凝土构件配筋计算方法[J].铁道建筑技术,2020(1):25-29;59.
[4] 李波.任意截面双向偏心受压构件极限承载力计算方法[J].铁道标准设计,2020,64(增刊1):90-93;98.
[5] 叶英华,焦俊婷.双向偏压钢筋混凝土异形构件截面分析的简化方法[J].建筑结构学报,2004(6):83-87.
[6] 徐珍凤.双向偏压构件的实用计算[J].浙江建筑,2009,26(4):17-19.
[7] 阴文蔚.基于 Python 优化的任意钢-混组合截面应力与承载力分析研究[J].铁道科学与工程学报,2021,18(12):3311-3319.
[8] CHUN Wesley. Python 核心编程[M].孙波翔译.北京:人民邮电出版社,2016:235-259.
[9] 麦金尼.利用 Python 进行数据分析[M].徐敬一译.北京:机械工业出版社,2018:136-140.
[10] 刘瑞.Python 语言在科学算法中的优势[J].信息与电脑,2019,16(4):57-58.
[11] 张若愚.Python 科学计算[M].2 版.北京:清华大学出版社,2016.
[12] 同济大学应用数学系.高等数学(下册)[M].5 版.北京:高等教育出版社,2002:143.