DOI:10.16799/j.cnki.csdqyfh.250555

# 基于数学方程的异形曲面桥塔在桥梁工程中的应用

余方亮,李　冲,怀臣子
(黄河勘测规划设计研究院有限公司,河南 郑州 450003)

**摘　要:** 为解决异形曲面桥塔形状复杂带来的设计图纸表达困难、坐标定位不准确、模型复现困难等工程应用不便的问题,依托某景观桥梁,通过对比不同异形曲面构建方法的优劣,选择了数学方程的曲面构建方法。依据数学理论,通过提取桥梁异形曲面桥塔的典型曲面特征,突破传统数学方程通常用于简单、规则曲面的认知,依托微分几何原理构造出完整、严谨的异形扭转曲面方程。结果表明,基于数学方程的曲面构造方法具有形式简洁、定位精确、便于在图纸上表达、便于后期模型复现的优势,通过合理的构造方法可用于复杂、非规则的异形曲面。该方法的拓展应用有效解决了异形曲面结构施工过程中的诸多难题,显著提高了工程施工的速度和准确度,取得了良好的经济效益。

**关键词:** 异形桥塔;扭转曲面;曲面方程;NURBS 曲面;直纹曲面
**中图分类号:** U448.21;TU997　　**文献标志码:** B　　**文章编号:** 1009-7716(2026)01-0203-04

# Application of Irregular Curved Surface Bridge Pylon Based on Mathematical Equations in Bridge Engineering

YU Fangliang, LI Chong, HUAI Chenzi
(Yellow River Engineering Consulting Co., Ltd., Zhengzhou 450003, China)

**Abstract:** To address the engineering application inconveniences caused by the complex shapes of irregular curved surface bridge pylons, such as the difficulty in expressing design drawings, inaccurate coordinate positioning, and the difficulty in replicating models, relying on a landscape bridge, and by comparing the advantages and disadvantages of different irregular curved surface construction methods, the curved surface construction method of mathematical equation is selected. On the basis of mathematical theory, and by extracting the typical curved surface characteristics of irregular curved surface bridge pylon, the traditional mathematical equations that are usually used for the understanding of simple and regular curved surfaces are broken through. Relying on the principles of differential geometry, a complete and rigorous equation for the irregular torsional curved surface is constructed. The result shows that the curved surface construction method based on mathematical equations has the advantages of simple form, precise positioning, ease of expression on the drawing, and ease of model reproduction in the later stage. Through reasonable construction methods, it can be used for complex and irregular special-shaped curved surface. The expanding application of this method can effectively solve many difficulties in the construction of irregular curved surface structure, and significantly improve the speed and accuracy of engineering construction, which has achieved the good economical benefits.

**Keywords:** irregular bridge pylon; torsional curved surface; curved surface equation; NURBS curved surface; ruled curved surface

## 0　引　言

随着中国城市化进程的加快和人民生活水平的显著提升,现代建筑已从单纯满足功能需求转向追求功能与美学的有机统一[1]。这一趋势在近二十年尤为突出,以北京中央电视台总部大楼[2]、广州大剧院[3]为代表的创新实践标志着建筑艺术与工程技术的融合进入新纪元。在桥梁工程领域,这种设计理念的革新同样深刻[4],工程师们突破传统直线与规则曲线的限制,将复杂曲面与拓扑形态融入桥梁主体结构中。以南宁大桥[5]、郑州潮晟路跨潮河桥、苏州澹台湖景观桥[6]为代表的突破性设计提升了桥梁的视觉识别性,成为功能与美学和谐统一的

收稿日期:2025-05-30
作者简介:余方亮(1991—),男,硕士,工程师,从事桥梁设计工作。

典范。

作为桥梁景观的核心要素，桥塔的形态创新尤为引人注目。当代设计师通过曲面设计赋予桥塔独特的艺术表现力。淮安白马湖大桥[7]通过三维空间曲面渐变融合实现力学效率与视觉韵律的统一，上海宝山祁连山路大桥[8]的帆船型曲面桥塔更将风荷载优化与地域文化符号巧妙融合。然而，异形曲面桥塔的工程实践仍面临多重技术瓶颈[9-10]。传统设计方法在三维曲面设计、图纸表达、施工误差控制等方面存在显著局限性。如何在图纸中准确表达异形曲面的形状，已成为制约该领域发展的关键问题。

某工程桥梁位于重点旅游产业园区，是集多功能为一体的高端文化旅游综合地标。该桥梁在满足结构功能的基础上，对景观有较高的要求，效果图如图1所示。

图1　某景观桥梁效果图

从效果图中可以看出，桥梁的桥塔、拉索、外挑人行道构成了景观效果的主要表现方式，但其中构造最复杂的当属桥塔。桥塔兼具曲面外表与明显棱角，且棱角沿塔高方向扭转变化，截面尺寸也沿塔高方向显著变化，形态十分复杂，设计难度较大。

本研究基于上述桥塔，针对异形曲面扭转桥塔的上述问题，采用基于数学方程的异形曲面桥塔，有效解决了异形曲面桥塔施工复杂、图纸表达困难、施工误差控制困难的缺点。

## 1　异形曲面的构建方法

在异形曲面桥塔的设计中，曲面的构建方法作为关键的因素直接决定着设计思路、实现形式和设计效果。当前主流的曲面构建方法包括网格法[11]、NURBS曲面法[12]和数学方程法三种，核心差异在于对连续曲面的离散化处理程度与表达形式。网格法通过将曲面分解为有限数量的多边形单元实现几何近似，即空间形式的“以直代曲”法。NURBS曲面法则基于非均匀有理B样条理论[13]，通过控制点网络与节点矢量定义光滑曲面，并通过数学理论保证曲率的连续和均匀变化。数学方程法则采用显式解析式直接定义曲面几何关系，以简洁的公式建立空间坐标的数学映射。

从技术层面分析，三种方法均可运用于工程实际之中，但其运用场景、实现难度及适用性却有所差异。网格法具备普适性，但其多边形近似导致几何精度与数据体量之间的矛盾难以调和，通常用于有限元分析。NURBS曲面法能够精确描述自由曲面形态，但设计参数与几何特征之间缺乏显式关联，需要专业软件环境支持，通常用于汽车、航空航天等产业集中度较强的设计生产一体化的场景[14]。数学方程法通过明确的函数关系直接定义曲面，可将复杂的三维曲面转化为可标注于施工图纸的数学符号，从根本上规避了数字化模型在跨平台流转中的数据失真风险。

数学方程法具有形式简洁、定位精确、便于在图纸上表达、便于后期模型复现的优势，在实际工程中具有显著优势，但数学方程法通常用于简单曲面，如球面、柱面、锥面、二次曲面等。本研究将数学方程法推广到复杂曲面，通过提取曲面特征，采用数学方式进行描述，基于微分几何[15]理论构造出完整、严谨的曲面方程。

## 2　曲面方程的构造思路

根据数学理论，以方程形式表达的曲面方程具有两个独立的参数$u$，$v$，其表达通式如式(1)所示。

$$\mathrm{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right) \tag{1}$$

采用数学方程构建异形曲面即为确定曲面方程的形式r(, )和两个独立参数$u$，$v$的取值范围。总体思路有两种，即自上而下的构建方式和自下而上的构建方式。

自上而下的构建方式采用曲面—曲线—点的方式进行，主要步骤如下：

(1)采用基本几何曲面，如球面、柱面、锥面、二次曲面等作为曲面构建的族库，确定基本的曲面方程形式r(, )。

(2)通过调整曲面族库的参数适应实际结构的形状，然后通过曲面的布尔运算(交集、并集)等确定各曲面单元的边界曲线，确定曲面方程第一参数的范围$u$。

(3)通过各曲面单元边界曲线的布尔运算确定

彼此间的交点位置，确定各边界曲线的交点，从而确定曲面方程第二参数的范围 $v$，最终确定空间曲面的方程。

自下而上的构建方式采用点—曲线—曲面的方式进行，主要步骤如下：

（1）提取曲面的关键参数点，确定点的坐标 $(x, y, z)$。

（2）根据曲面的特征形式，利用点的变化、移动引入第一个参数 $u$，确定特征空间曲线 $\mathrm{r}(u)$ 和参数 $u$ 的范围。

（3）根据特征空间曲线形成曲面的变化移动方式，引入第二个参数 $v$，确定特征空间曲面 $\mathrm{r}(u, v)$ 和参数 $v$ 的范围，最终确定空间曲面的方程。

两种构建方式实际运用均较为广泛。通常具有明显规则特征的曲面，或者由规则曲面拼接构建而成的曲面，采用自上而下的构建方式较为简单；而形成方式比较明确，可以拆分成点线变化的曲面，采用自下而上的构建方式更为合理。本桥桥塔具有扭转和拼合的特征，但扭转曲面不是规则曲面，采用自上而下的第一步曲面选择就会遇到困难；本桥桥塔沿高度方向的截面具有相似变化的特性，可视作截面沿高度的扭转、缩放，而截面均为平面，可以方便地由点所生成，因此本桥的异形扭转曲面采用自下而上的构建方式。

根据上述分析，本桥异形曲面采用自下而上，按点—曲线—曲面的方式构建，流程如图 2 所示。

图 2　曲面方程的构造流程

## 3　曲面方程的构建过程

### 3.1　确定桥塔底面形状及特征点坐标

根据桥塔的效果图，可以很容易对桥塔的截面进行剖切。如图 3 所示，桥塔截面是以菱形为基础，通过设置切角，局部插入关键点形成富有变化和韵律的形状。从工程角度而言，切角的形状便于隐藏装饰灯带、灯条，同时也具有更优秀的风动力特性[16]。

图 3　桥塔底面形状及特征点

图 3 中 16 个特征点的坐标可以很容易根据桥塔的形状拟合确定，坐标简记为式（2）。

$$P_i = \left(x_i, y_i, 0\right) \quad (i = 1\sim16) \tag{2}$$

### 3.2　添加几何特征，形成曲线方程

通过观察桥塔截面沿高度方向的变化特征可以发现，桥塔的特征包括缩放、扭转和塔顶附近的切平。塔顶附近的切平在数学上和工程上很容易实现，此处重点关注缩放和扭转。通过截取不同高度的桥塔断面并进行相似性拟合可以清晰判断缩放和扭转的方式，如图 4 所示。

图 4　桥塔各位置横截面

从图 4 中可以看出，沿高度升高的过程中，桥塔的扭转沿顺时针方向进行，且扭转角速度近似均匀；截面的缩放表现出横轴和纵轴同时进行，且横轴缩放的比例显著小于纵轴的特征。上述扭转和缩放可以清晰地采用数学方式表达。

（1）扭转变换。三维空间中沿竖轴按从上往下所视的顺时针扭转 $\theta$ 角度的变换矩阵如式（3）所示。

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

（2）缩放变换。三维空间中沿横、纵轴比例为 $k_x$，$k_y$ 的三维空间缩放变换矩阵如式（4）所示。

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

对坐标进行扭转变换 T 或缩放变换 S，相当于对坐标 P 左乘对应的变换矩阵。

通过比较、分析，以高度参数 $h(0 \leqslant h \leqslant 1)$ 为自变量，采用数学拟合的方式确定扭转角 $\theta$ 和缩放比例 $k_x$，$k_y$ 随高度 $h$ 的变化关系，拟合的结果如式(5)、(6)所示。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi h}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi h}{3}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi h}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi h}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -0.682h^3+2h^2-2h+1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.208h^3+0.752h^2-0.792h+0.571 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

由此形成的桥塔边界曲线 $C_i$（一共16条，分别与16个特征点对应）的表达式如式(7)所示。

$$\mathbf{r}_i(h) = \begin{bmatrix} x_i(h) \\ y_i(h) \\ z_i(h) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 86h \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中：$h$ 为参数，$0 \leqslant h \leqslant 1$。

### 3.2　构建曲面方程

目前桥塔边界曲线 $C_i$ 均已构造出来，需要根据边界曲线构造桥塔外平面 $\Sigma_i$，从沿高度方向剖切的断面来看，桥塔的形状边界均为直线，这与微分几何中的直纹曲面[17]具有相同的特征。

根据微分几何原理，直纹曲面是指由直母线构成的曲面，其表达通式如式(8)所示。

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u) \tag{8}$$

式中：$\mathbf{a}(u)$ 是一条空间曲线；$\mathbf{b}(u)$ 是随 $u$ 变化的一个方向。在已知曲面的两条边界曲线表达式 $\mathbf{r}_1(h)$ 和 $\mathbf{r}_2(h)$ 时，显然可以按式(9)、(10)进行构造，以确保曲面 $\Sigma$ 是直纹面，并取 $0 \leqslant v \leqslant 1$ 使得在 $v=0$ 和 $v=1$ 的边界处的表达式恰好等于已知的边界曲线。

$$\mathbf{a}(u) = \mathbf{r}_1(h) \tag{9}$$

$$\mathbf{b}(u) = \mathbf{r}_2(h) - \mathbf{r}_1(h) \tag{10}$$

此时构造出的直纹曲面 $\Sigma_i$ 即为第 $i$ 个异形曲面桥塔的曲面片，其数学表达式如式(11)所示。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(u,v) &= \mathbf{r}_i(h) + v(\mathbf{r}_i(h) - \mathbf{r}_i(h)) \\ &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \left( \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 86h \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

式中：参数 $h$，$v$ 的取值范围为 $0 \leqslant h \leqslant 1$，$0 \leqslant v \leqslant 1$。

### 3.3　曲面片拼合

分别对16个直纹曲面循环进行构造，即可得到全部的异形桥塔曲面片。由于两个相邻曲面片的边界均为曲线 $\mathbf{r}_{i+1}(h)$，就确保了曲面片间可以依靠共同的边界完全贴合。

构造完成的桥塔可以采用多种3D软件很方便地进行重现，图5示意了由上述数学方程确定的桥塔外观与景观效果图的对比。从图5中可以看出，采用数学方程确定的桥塔外观与景观效果图基本一致，在景观上取得了良好的效果。

(a)　(b)

图5　不同视角下方程确定的桥塔与景观效果图对比

## 4　结　语

某景观桥梁项目将数学方程法的应用由简单规则曲面拓展到复杂的异形扭转曲面，通过提取曲面的缩放、扭转两种特征形态，利用微分几何中的直纹曲面建立了完整的桥塔外轮廓曲面方程。该方法在桥梁工程上的成功应用拓展了数学方程法在工程上的适用范围，充分发挥了数学方程法形式简洁、定位精确、便于在图纸上表达、便于后期模型复现的优势，为项目的顺利实施提供了有力的支撑，也为后续类似扭转曲面的工程设计提供了新的思路和经验。

**参考文献：**

[1] 徐利平．基于桥梁与建筑整体视野下的桥梁美学理论研究[J]．公路，2021，66(3)：78-84.

[2] 朴才思，张然．北京中央电视台新址大楼项目的设计与施工[J]．时代建筑，2013(5)：82-87.

[3] 杨学文．广州大剧院——广州新中轴线上的标志性建筑之一[J]．城乡建设，2019(13)：9.

[4] 梁艳，何畏，唐茂林．桥梁美学2020年度研究进展[J]．土木与环境工程学报(中英文)，2021，43(增刊1)：234-241.

[5] 南宁大桥——世界首座大跨径斜吊拱曲线桥梁[J]．八桂侨刊，2011(4)：78.

[6] 王小成，钮卫东，张平，等．基于回环体系的大跨径景观人行桥设计策略研究——以苏州市宝带桥-澹台湖景区项目为例[J]．城市建筑，2021，18(6)：181-183.

[7] 卓旬，刘彬，徐梓豪，等．BIM技术在异形钢结构桥梁施工中的应用方法研究——以白马湖大桥为例[J]．土木建筑工程信息技术，2023，15(2)：68-73.

[8] 田周松．上海祁连山路跨蕴藻浜大桥总体设计[J]．城市道桥与防

（下转第211页）