

悬臂板内力计算方法研究与应用

曹东利, 路文发

(北京市市政工程设计研究总院有限公司, 北京市 100082)

摘要: 针对公路桥梁长悬臂板结构内力计算问题, 系统比较了规范法、沙柯公式法、贝达巴赫公式法与有限元法四种计算方法的适用性与精度。通过建立不同悬臂长度(2.25、2.75、3.25 m)的板单元模型, 结合《公路桥涵设计通用规范》(JTG D60—2015)荷载标准, 分析了车轮荷载作用下的根部弯矩。结果表明, 规范法由于忽略板的双向受力特性, 计算结果偏小20%~30%, 不适用于长悬臂板; 而沙柯公式、贝达巴赫公式与有限元法结果较为接近, 其中有限元法结果最为保守, 建议作为设计依据。研究还提出了基于后轴弯矩估算总弯矩的简化计算方法, 为长悬臂板设计提供了实用参考。研究结论表明, 随着悬臂长度增加, 不同计算方法间的差异逐渐增大, 在实际工程中应综合考虑计算精度与效率, 选择合适的计算方法。

关键词: 长悬臂板; 内力计算; 沙柯公式; 贝达巴赫公式; 有限元法; 有效分布宽度

中图分类号: U441; TU997

文献标志码: A

文章编号: 1009-7716(2026)07-0288-05

Research and Application of Calculation Methods for Internal Forces of Cantilever Slabs

CAO Dongli, LU Wenfa

(Beijing Municipal Engineering Design and Research Institute Co., Ltd., Beijing 100082, China)

Abstract: Aiming at the problems of calculating structural internal force of long cantilever slabs in highway bridges, the applicability and accuracy of four calculation methods of the specification-based approach, the Sawko formula method, the Baider-Bahkt formula method and the finite element method are systematically compared. By establishing the plate element models with different cantilever lengths (2.25 m, 2.75 m and 3.25 m) and combined with the load standards in the *General Code for Design of Highway Bridges and Culverts* (JTG D60—2015), the root bending moments under wheel loads are analyzed. The results indicate that due to ignoring the bidirectional force characteristics of the slab, the calculation result of the specification-based approach is 20%~30% smaller and is not applicable to long cantilever slabs. In contrast, the results of the Sawko formula, Baider-Bahkt formula, and finite element method are relatively close, in which the result of the finite element method is the most conservative, and is recommended as the basis for design. A simplified calculation method for estimating the total bending moment based on the rear axle bending moment is proposed, providing a practical reference for the design of long cantilever slabs. The conclusions show that as the cantilever length increases, the discrepancies among different calculation methods become more significant. In practical engineering, the computational accuracy and efficiency should be comprehensively considered to select an appropriate calculation method.

Keywords: long cantilever slab; internal force calculation; Sawko formula; Baider-Bahkt formula; finite element method; effective distribution width

0 引言

“十四五”时期, 我国交通基础设施建设进入高质量发展阶段, 公路桥梁数量持续增长, 大跨径、异型截面桥梁日益增多^[1-3]。现浇箱梁采用长悬臂构

造可节约材料、减轻自重并改善桥面宽度, 经济效益显著。然而, 长悬臂板内力分析面临精度难题。现行规范推荐的有效分布宽度法基于单向板假定, 未充分考虑翼缘与主梁协同工作及双向受力特性^[4-5], 且要求荷载距悬臂根部不大于2.5 m。随着桥面宽度与美观性要求提升, 实际工程中很多悬臂长度超过3 m, 超出该方法适用范围^[6-7]。但目前设计中多依赖经验修正或有限元模拟, 缺乏统一标准与理论指导^[8]。

收稿日期: 2026-01-20

作者简介: 曹东利(1994—), 男, 硕士, 工程师, 从事桥梁设计工作。

通信作者: 路文发(1995—), 男, 硕士, 工程师, 从事桥梁设计工作。电子邮箱: 435205957@qq.com

为此,本文梳理规范有效分布宽度法、沙柯公式法、贝达巴赫公式法及有限元法的原理与适用条件;建立不同悬臂长度(2.25、2.75、3.25 m)模型,按规范荷载标准计算根部弯矩;通过理论分析与数值算例对比,评估各方法误差及适用性,以完善长悬臂板设计理论,为工程实践提供可靠依据。

1 理论基础

1.1 规范有效分布宽度法

1.1.1 方法概述

规范有效分布宽度法是我国《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(JTG 3362—2018)中推荐的悬臂板内力计算方法。该方法基于单向板受力假定^[9-10],将三维板结构问题简化为二维梁问题进行计算^[11],通过引入有效分布宽度的概念来考虑荷载在横向的分布效应。

规范明确规定了该方法的适用范围:荷载作用边界到悬臂根部的距离值不大于 2.5 m。这一限制是基于大量计算和试验结果得出的^[12-13]。当悬臂长度超过 2.5 m 时,板的双向受力特性更加显著,单向板假定不再适用,计算结果的误差会明显增大。

1.2 沙柯公式法

沙柯公式是基于弹性薄板理论推导的解析解方法,适用于等截面无边界悬臂板的内力计算。该方法考虑了板的双向受力特性,理论推导较为严谨。

对于多个集中荷载 P_i 同时作用于悬臂板的情况,根部 $x=0$ 处单位宽度的总弯矩可通过叠加原理计算:

$$M = -\frac{A'}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{a_1} \cdot \frac{1}{1 + A' \cdot d_i/a_0} \tag{1}$$

式中: M 为悬臂根部单位宽度的弯矩,kN/m; P_i 为第 i 个车轮的轮重,kN; a_1 为车轮荷载在纵桥向的作用长度,m; d_i 为第 i 个车轮中心至计算板条(通常取 $y=0$,即腹板边缘)的横向距离,m; a_0 为悬臂板的长度,m; A' 为荷载纵向位置影响参数, x_i/a_0 的函数,需通过查沙柯编制的参数表确定。其中 x_i 为荷载合力作用点(或单个荷载作用点)至悬臂根部的距离。

1.3 贝达巴赫公式法

贝达巴赫公式是沙柯公式进一步优化的成果。沙柯公式假设悬臂板的横向无限大,因而适用于边界条件不受限制的理想情况^[14]。然而实际中悬臂板是有边界的,这种悬臂板边界与沙柯公式假设的边界条件差别很大。

利用引进边界修正系数^[15]的方式,考虑横向边界对外来力作用下内力分布起着约束、调节的作用,并使其更加符合工程上有限宽度悬臂板的真实力学情况,得到贝达巴赫公式:

$$M = -\frac{A''}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{a_1} \cdot \frac{1}{1 + A'' \cdot d_i/a_0} \tag{2}$$

式中: A'' 为贝达巴赫参数,它不仅与荷载纵向位置比 x_i/a_0 有关,还与悬臂板的横向边界条件及宽跨比有关; P_i 为第 i 个车轮的轮重,kN; a_1 为车轮荷载在纵桥向的作用长度,m。

1.4 有限元法

有限元法通过将连续的结构离散为有限个单元,建立单元刚度矩阵,组装成总体刚度方程,求解结构的位移和应力^[15-16]。对于长悬臂板这类复杂受力结构,有限元法能够较好地模拟实际受力状态,考虑各种复杂因素。

2 计算实例分析

2.1 计算参数与模型

2.1.1 悬臂板尺寸参数

为系统比较不同计算方法的效果,本文选取三种不同悬臂长度的板进行计算分析,具体尺寸参数见表 1,各参数设置见图 1。

表 1 悬臂板参数表			单位:m
参数	对照组 1	对照组 2	对照组 3
悬臂长度 L	2.25	2.75	3.25
根部厚度 t_1	0.80	0.80	0.80
端部厚度 t_3	0.25	0.25	0.25
折点厚度 t_2	0.45	0.45	0.45
折点位置 b	1.00	1.20	1.40

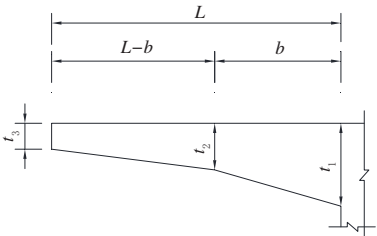


图 1 悬臂板参数示意图

2.1.2 材料参数

混凝土材料参数按照 C50 混凝土取值为:
弹性模量 $E_c = 3.45 \times 10^4$ MPa;
泊松比 $\nu = 0.2$;
容重 $\gamma = 25$ kN/m³。

2.1.3 荷载参数

荷载按照《公路桥涵设计通用规范》(JTG D60—

2015)中车辆荷载的标准值取用。

车轮着地面积考虑铺装层的扩散作用,扩散角按 45° 计算。车轮作用在板面上的尺寸为:

$$\text{横桥向: } b_1 = 0.6 + 2 \times 0.2 = 1 \text{ m}$$

$$\text{纵桥向: } a_1 = 0.2 + 2 \times 0.2 = 0.6 \text{ m}$$

对应的分布荷载集中度为:

$$\text{后轴: } q = \frac{70}{(1 \times 0.6)} = 116.7 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{中轴: } q_{\text{中}} = \frac{60}{(1 \times 0.6)} = 100 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{前轴: } q_{\text{前}} = \frac{30}{(1 \times 0.6)} = 50 \text{ kN/m}^2$$

2.1.4 边界条件

悬臂板根部(与箱梁腹板连接处)按固结考虑,约束所有方向的位移与转角。为准确模拟单片悬臂板的受力,模型在横向一侧(模拟箱梁腹板位置)施加固结约束,另一侧为自由边界。防撞墙等附属结构因设置断缝,不考虑其对板端的约束作用^[17]。

2.2 规范法计算过程

以悬臂长度 $L=2.25 \text{ m}$ 为例,详细说明规范法的计算过程。

2.2.1 有效分布宽度计算

对于后轴车轮,荷载作用边界到悬臂根部的距离为:

$$l = L - a_1/2 = 2.25 - 0.3 = 1.95 \text{ m}$$

平均板厚度:

$$h = \frac{(0.20 + 0.40)}{2} = 0.30 \text{ m}$$

有效分布宽度为:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \times (t + h) + l \\ &= 0.6 + 2 \times (0.2 + 0.3) + 1.95 = 3.85 \text{ m} \end{aligned}$$

2.2.2 弯矩计算

单位宽度弯矩计算公式为:

$$M = -\frac{P}{a} \quad (3)$$

$$\text{后轴: } M_{\text{后}} = -140/3.85 \approx -36.3 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$\text{中轴: } M_{\text{中}} = -120/3.85 \approx -31.2 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

$$\text{前轴: } M_{\text{前}} = -30/3.85 \approx -7.8 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

总弯矩为各轴弯矩之和:

$$M_{\text{总}} = -36.3 - 31.2 - 7.8 \approx -75.3 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$$

2.3 沙柯公式法计算过程

2.3.1 坐标系建立

以悬臂根部为原点,沿悬臂方向为 x 轴建立坐标系。

2.3.2 参数确定

以悬臂长度 $a_0 = 2.25 \text{ m}$ 为例:

将作用于悬臂端部附近的分布荷载等效为作用于其形心的集中荷载,等效位置参数

$$\xi = L - \frac{a_0}{2} = 2.25 - 0.3 = 1.95 \text{ m}$$

$$\text{参数比值: } \frac{\xi}{a_0} = \frac{1.95}{2.25} \approx 0.867$$

查沙柯参数表得: $A' = 1.05$

2.3.3 弯矩计算

沙柯公式的弯矩计算公式为:

$$M = -\frac{A'}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{a_1} \cdot \frac{1}{1 + A' \cdot d_i/a_0} \quad (4)$$

式中: P_i 为第 i 个车轮的轮重; d_i 为该车轮中心至计算板条($y=0$)的横向距离。

将各车轮轮重 P_i 及其横向位置 d_i (代入公式进行叠加计算,得到根部总弯矩 M)。具体计算过程从略。

2.4 贝达巴赫公式法计算过程

2.4.1 参数确定

对箱梁悬臂板而言,令 $y=0$ 处一侧腹板为固定端,将其边界参数定为板体有效计算宽度 B (模型横向宽度)与悬臂长度 L 之比,本文取 $B=8.0 \text{ m}$ 。

边界条件参数: $B/L = 8.0/2.25 = 3.556$

荷载位置参数: $\xi/a_0 = 0.867$

查贝达巴赫参数表,得: $A'' = 1.12$ 。

2.4.2 弯矩计算

贝达巴赫公式与沙柯公式相似,但使用参数 A'' :

$$M = -\frac{A''}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{a_1} \cdot \frac{1}{1 + A'' \cdot d_i/a_0} \quad (5)$$

2.5 有限元法计算过程

2.5.1 模型建立

采用MIDAS FEA软件建立三维实体单元模型,图2所示为模型网格划分图。模型纵向取实际长度 8.0 m ,横向取悬臂长度 L 。

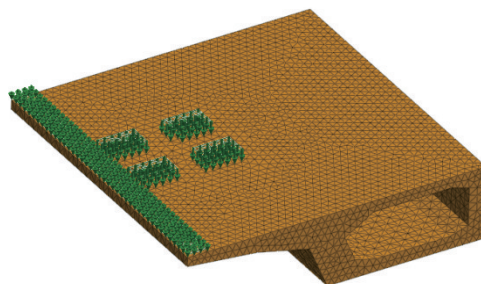


图2 节点内部网格划分图

单元划分:采用六面体实体单元进行网格划分。在荷载作用区域和根部区域加密网格,网格尺寸控制在 0.1 m 左右;在其他区域采用较粗的网格,网格尺寸约 0.02 m。共划分约 50 000 个单元。

边界条件:在根部截面所有节点施加固结约束,限制所有方向的位移和转角^[18]。

荷载施加:按照车轮实际作用面积施加分布荷载。

2.5.2 计算分析

图 3 至图 5 示出了悬臂板在车轮荷载作用下的应力云图,最大拉应力出现在根部截面的上缘,最大压应力出现在下缘。

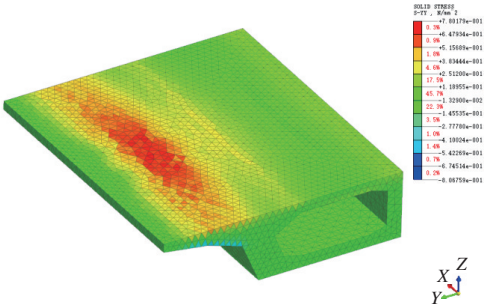


图 3 悬臂 L=2.25 m 应力云图(单位:MPa)

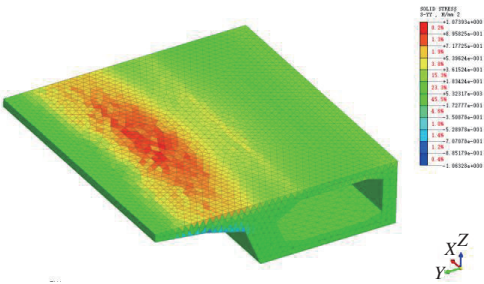


图 4 悬臂 L=2.75 m 应力云图(单位:MPa)

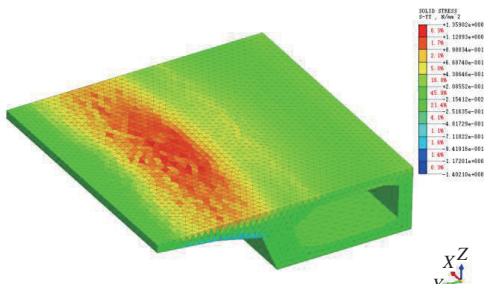


图 5 悬臂 L=3.25 m 应力云图(单位:MPa)

2.5.3 结果提取

提取了悬臂根部截面的应力结果于表 2。

表 2 有限元法结果对比表			单位:MPa
悬臂长度/m	上缘拉应力	下缘压应力	
2.25	0.78	0.81	
2.75	1.07	1.06	
3.25	1.36	1.40	

通过材料力学公式反算弯矩:

M = - \frac{\sigma_{max} \times b \times h^2}{6} \tag{6}

式中:单位宽度 b 取 1.0 m;根部板厚 h 取 0.8 m。

代入计算(以 $L=2.25$ m 为例):

M = - \frac{0.78 \times 1.0 \times 0.8^2}{6} = -83.2 \text{ kN}\cdot\text{m}

3 计算结果汇总与分析

3.1 计算结果

如表 3 所示,各方法计算结果趋势一致,根部弯矩均随悬臂长度增加而增大,但规范法增大幅度远小于沙柯法、贝达巴赫法和有限元法增幅。

表 3 不同计算方法结果对比表					单位:kN·m
悬臂长度/m	规范法	沙柯法	贝达巴赫法	有限元法	
2.25	-75.3	-80.5	-82.8	-83.2	
2.75	-89.4	-108.2	-112.0	-114.1	
3.25	-106.5	-140.5	-143.0	-145.1	

3.2 不同轴载贡献分析

为分析各轴荷载对总弯矩的贡献,分别计算了仅考虑后轴和考虑全部车轴两种情况下的弯矩值,结果见表 4。

表 4 不同轴载贡献对比表(以 L=2.25 m 为例)			
计算方法	仅后轴弯矩/ (kN·m·m ⁻¹)	全部车轴总弯矩/ (kN·m·m ⁻¹)	后轴贡献率/ %
规范法	-36.3	-75.3	48.3
沙柯公式法	-52.3	-80.5	65.0
贝达巴赫法	-54.0	-82.8	65.2
有限元法	-54.1	-83.2	65.0

可以看出:除规范法外,其他方法中后轴荷载对总弯矩的贡献率均在 60% 以上,且随悬臂长度增加而增大。

当悬臂长度较大时(如 3.25 m),后轴贡献率超过 70 %,说明后轴荷载是控制设计的主要因素。

3.3 误差分析

以有限元法结果为基准,计算得到其他方法的相对误差,结果见表 5。

表 5 不同计算方法误差对比表				单位:%
悬臂长度/m	规范法	沙柯法	贝达巴赫法	
2.25	-9.5	-3.2	-0.5	
2.75	-21.6	-5.2	-1.8	
3.25	-26.6	-3.2	-1.4	

误差分析表明:规范法的误差最大,且随悬臂长度增加误差迅速增大;沙柯公式和贝达巴赫公式的误差较小,一般在 5% 以内;贝达巴赫公式考虑边界

条件,计算结果略大于沙柯公式,更接近有限元结果。

4 简化计算方法及设计建议

4.1 基于后轴弯矩的估算方法

计算分析表明,后轴荷载对总弯矩的贡献率为65%~75%。因此,先计算后轴荷载产生的弯矩,然后乘以放大系数估算总弯矩^[19]。

$$M_{\text{总}} = k_1 \times M_{\text{后轴}} \quad (7)$$

式中: $M_{\text{后轴}}$ 为仅考虑后轴荷载时的弯矩值; k_1 为放大系数,取值1.35~1.55,悬臂越长取值越大。

对于 $L=2.25$ m,取 $k_1=1.55$;对于 $L=3.25$ m,取 $k_1=1.35$ 。中间值线性插值。

4.2 基于规范法的估算方法

如果仍用规范法进行计算,可以引入修正系数^[20],提高计算精度。

$$M_{\text{修正}} = k_2 \times M_{\text{规范}} \quad (8)$$

式中: $M_{\text{规范}}$ 为规范法计算值; k_2 为修正系数,按表6取值。

表6 规范法修正系数建议值

悬臂长度/m	规范法
$L \leq 2.5$	1.00
$2.5 < L < 3.0$	1.15
$3.0 < L < 3.5$	1.25
3.25	1.30

4.3 组合提高系数法

综合各因素,提出组合系数法,流程如下:

采用沙柯公式或贝达巴赫公式计算后轴弯矩 $M_{\text{后}}$ 。

考虑全部车轴的影响,乘以提高系数 k_3 :

$$M_1 = k_3 \times M_{\text{后}} \quad (9)$$

考虑计算方法本身的特点,再乘以提高系数 k_4 :

$$M_{\text{设计}} = k_4 \times M_1 \quad (10)$$

总提高系数:

$$k_{\text{总}} = k_3 \times k_4 \quad (11)$$

建议取值范围如下:

k_3 取1.0~1.1,悬臂越长取值越大;

k_4 取1.0~1.1,根据计算方法选择,有限元法取1.0,解析法取1.05~1.10;

$k_{\text{总}}$ 取1.0~1.2。

4.4 设计流程建议

长悬臂板的内力设计应采用分级递进流程。

在初步设计阶段,首先依据桥梁总体布置确定悬臂长度,若悬臂长度不超过2.5 m,可采用规范法

初步估算;若超过2.5 m,则需进入详细计算阶段。

详细计算阶段宜优先选用沙柯公式或贝达巴赫公式,对于重要或复杂工程,推荐采用有限元法进行复核与对比分析。

在结果确定阶段,应以精度最高的有限元法结果作为基准,若无此条件则以贝达巴赫公式结果为准,并结合适当的安全储备确定最终设计弯矩值。

最后,在构造设计阶段,依据确定的弯矩完成配筋设计,并重视悬臂端部的防裂构造及附属结构的影响。

5 结 论

研究表明:悬臂长度大于2.5 m的长悬臂板结构,规范推荐的有效分布宽度法固守单向板假定,与实际情况不符,偏差较大(可达20%~30%),无法满足现今工程的要求;相比而言,沙柯公式、贝达巴赫公式及有限元法均能满足板体双向受力特点,而且3种方法都比规范方法准确,其中以有限元法最为精确,其较为适合于设计校核。最后研究表明,车辆后轴荷载对于悬臂板总弯矩的贡献率可达到65%~75%,是决定结构设计的关键因素。基于以上研究成果,提出了基于后轴弯矩的简化估算方法,结合规范有效分布宽度系数推导出实用修正系数,并形成了系统的计算设计步骤,为长悬臂板的安全可靠、经济合理的研究提供了一套完整的理论基础和指导方案。

参考文献:

- [1] 乐小刚,余晓琳.大悬臂预应力宽箱梁桥空间效应研究[J].城市道桥与防洪,2017(1):43-46.
- [2] 张宏光,李志强.基于沙柯公式的长悬臂板计算分析[J].桥梁建设,2010,40(4):35-39.
- [3] 陈志伟,周福霖.贝达巴赫公式在箱梁悬臂板设计中的应用[J].土木工程学报,2011,44(增刊2):154-158.
- [4] 曾天宝,张琳.长悬臂悬廊桥的受力性能研究[J].城市道桥与防洪,2021(12):55-57.
- [5] 赵人达,杨转运.关于规范中悬臂板有效分布宽度取值的探讨[J].公路,2013(8):102-106.
- [6] 吴红林,雷俊卿.长悬臂预应力混凝土箱梁桥面板受力性能研究[J].中国公路学报,2014,27(5):62-69.
- [7] 王凌波,贺拴海.车辆荷载下长悬臂板的局部应力分析[J].长安大学学报(自然科学版),2015,35(1):53-59.
- [8] 李乔,卜一之.大跨度桥梁长悬臂桥面板计算方法对比[J].工程力学,2016,33(10):136-143.
- [9] 叶见曙,贾金青.基于规范法与有限元法的悬臂板计算差异分析[J].结构工程师,2017,33(2):87-92.
- [10] 邵旭东,邓露.超宽桥梁长悬臂结构设计优化[J].湖南大学学报

(下转第299页)